

# Лекции 3,4

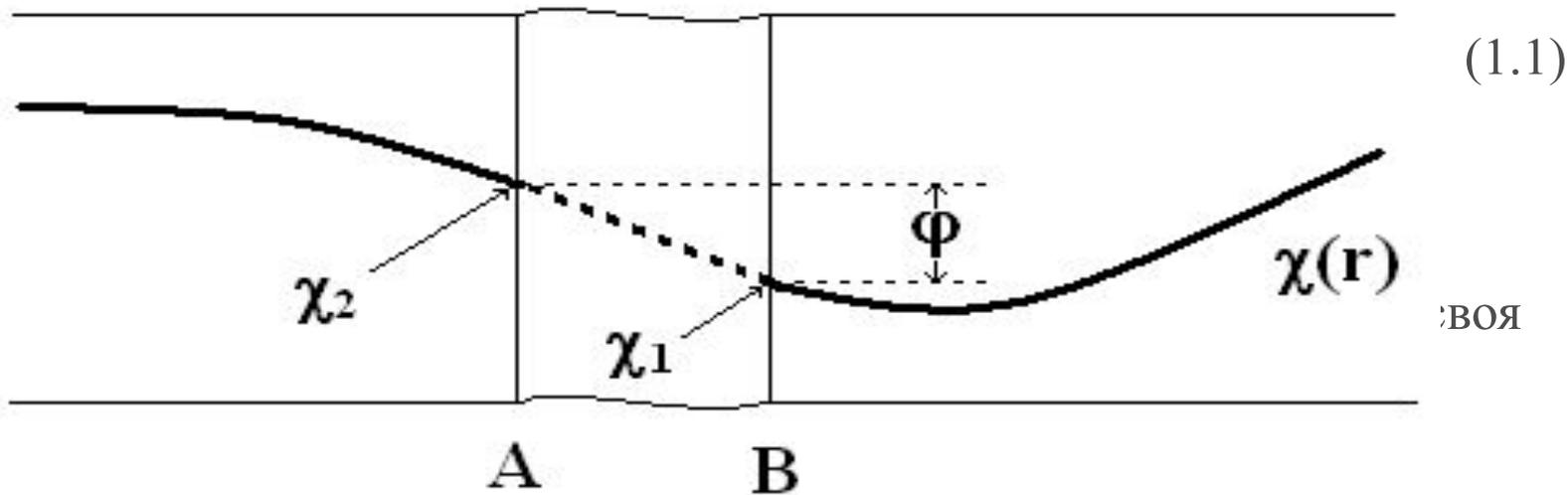
## Эффект Джозефсона



Feuille de Brochet  
au vin de Lumière  
—  
Mettez de l'ognon  
de  
de fromage  
—  
Hommes et Casis

# Разность фаз параметра порядка

1. Конденсат куперовских пар в СП-ке описывается единой комплексной волновой функцией — параметром порядка:



2.  $|\Psi|$  — амплитуда

3.  $\chi$  — фаза

4.  $|\Psi|$  и  $\chi = f$

5. Рассмотрим

фаза —  $\chi$

6. Введем

$$\phi = \phi(r, t) = \chi_2 - \chi_1 \quad (3.1)$$



# Стационарный эффект Джозефсона

## Первое свойство:

Стационарный эффект Джозефсона состоит в том, что **ток проходит через тонкий слой диэлектрика ( $d < \xi, \lambda$ )**, разделяющего 2 сверхпроводника, без затухания

## Второе свойство:

Существует критический ток Джозефсона  $I_c$ . Это максимальный ток, при котором еще нет затухания в барьере (диэлектрике). Этот ток называют еще **критический ток слабой связи**



# Зависимость фазы волновой функции $\chi$ от $r$

1) Ток (плотность тока) в сверхпроводнике определяется как

$$\mathbf{j} = (e \nabla / 2m) N_s \nabla \chi \quad (3.2)$$

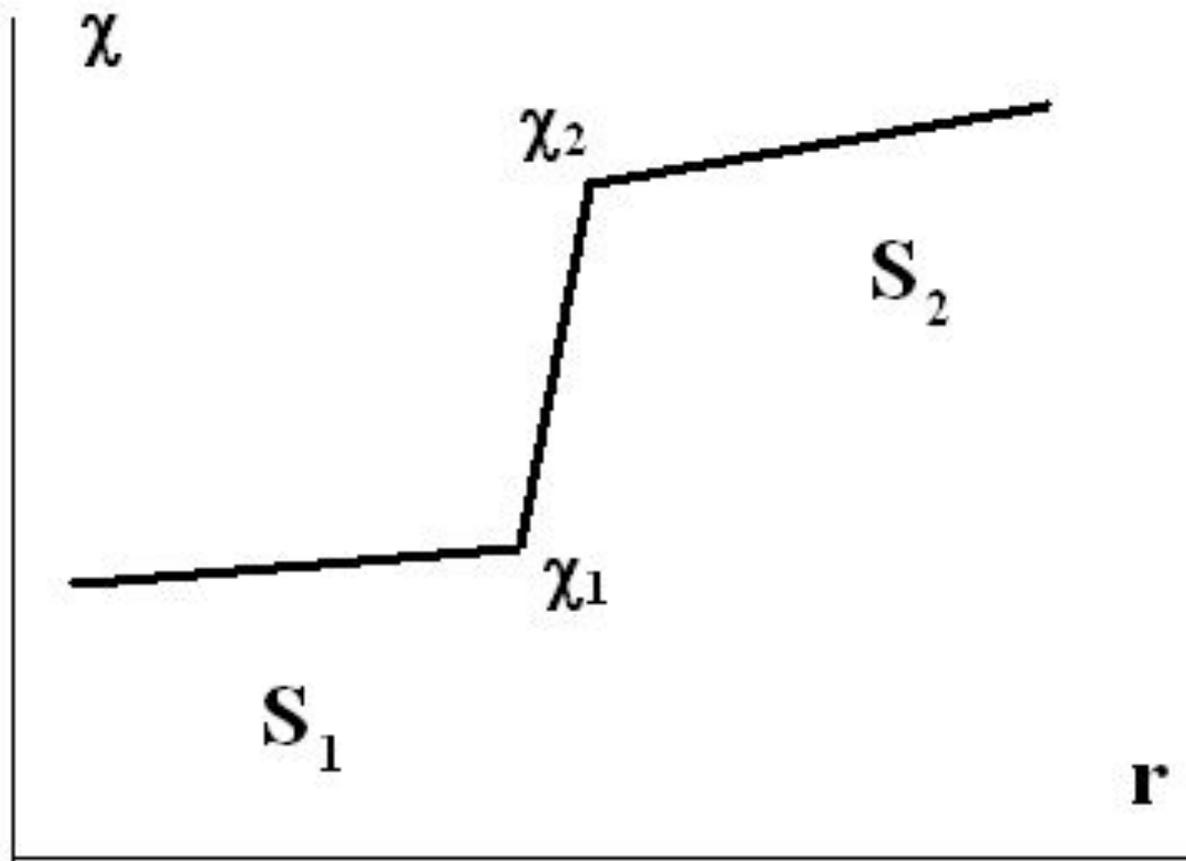
Здесь  $\nabla = \partial / \partial r$  (градиент),  $N_s$  – концентрация «сверхпроводящих» электронов.  
Это выражение следует из общего квантовомеханического выражения

$$\mathbf{j} \sim \psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi$$

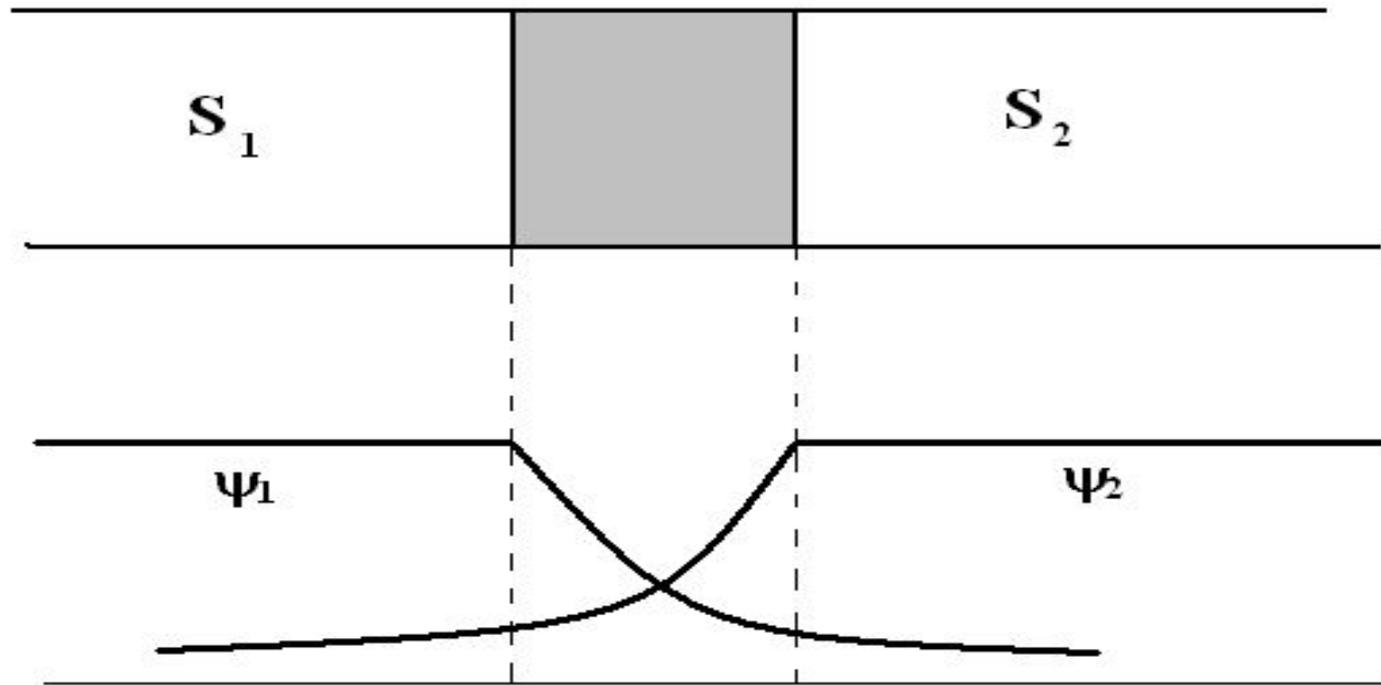
при  $\psi = |\psi| e^{i\chi}$ , если  $|\psi| = \sqrt{\rho}$  не меняется

2) Т.е.  $\chi$  меняется в сверхпроводнике вдоль тока. И  $\nabla \chi \neq 0$

# Зависимость фазы волновой функции $\chi$ от $r$



# Вывод основных уравнений Джозефсона



Здесь  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – волновые функции в левом и правом сверхпроводниках



# Вывод основных уравнений Джозефсона

Идея: скорость изменения волновой функции пар на одной стороне перехода зависит от мгновенных значений волновых функций по обе стороны перехода. Т.е., например,  $\partial\psi_1/\partial t \sim \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ , причем  $\beta \ll \alpha$ .

Таким образом

$$\begin{aligned} i \nabla \partial\psi_1/\partial t &= E_1\psi_1 + K\psi_2 \\ i \nabla \partial\psi_2/\partial t &= E_2\psi_2 + K\psi_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

## Замечания:

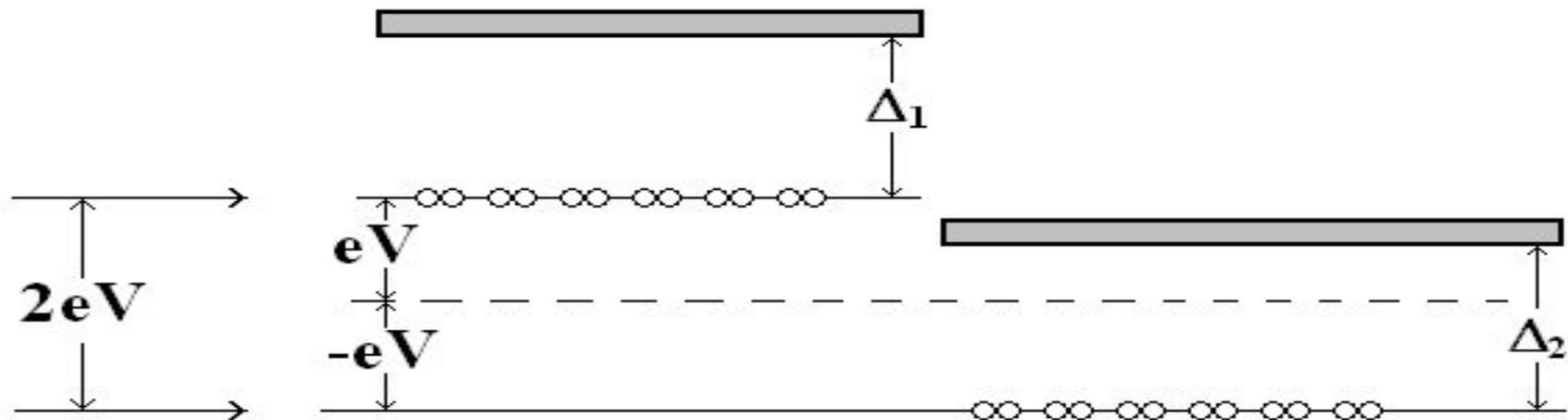
1. Написаны уравнения Шредингера.
2.  $E_1, E_2$  – собственные значения энергий (энергии основного состояния).
3.  $\psi_1, \psi_2$  – это **амплитуды** (комплексные) волновой функции = амплитуды вероятностей.
4.  $K$  – константа связи, характеризующая переход.

1)  $K=0$ , то сверхпроводники никак не связаны и (3.3) – обычное уравнение Шредингера для одной частицы.

2) Если у нас есть связь, и она слабая, то  $K \neq 0$  и  $K \ll E_{1,2}$

# Вывод основных уравнений Джозефсона

1. Пусть  $I > I_c$  может быть. Т.е.  $V \neq 0$  на переходе.
2. Энергетическая схема такого перехода:



И из (3.3) имеем

$$\begin{aligned} i \nabla \partial \psi_1 / \partial t &= eV \psi_1 + K \psi_2 \\ i \nabla \partial \psi_2 / \partial t &= -eV \psi_2 + K \psi_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Это уточнение (3.3)

# Вывод основных уравнений Джозефсона

$$\psi = |\psi| \cdot e^{i\chi} = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\chi} \quad (3.5)$$

Здесь  $\rho$  – плотность сверхпроводящих частиц (пар)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} &= \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \varphi - \frac{eV}{\hbar}$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial t} = -\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \varphi + \frac{eV}{\hbar}$$

Здесь  $\varphi = \chi_2 - \chi_1$



# Вывод основных уравнений Джозефсона

Пусть (для простоты) сверхпроводники одинаковы:

$$j = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{2K\rho}{\hbar} \sin \varphi$$

$\rho$  – плотность числа частиц (пар)

**Основное уравнение Джозефсона  
для тока:**

$$j = j_c \sin \varphi \quad (3.7)$$

Для рассмотренной модели (слабая связь с коэффициентом  $K$ ):

$$j_c = j_J = 2K\rho/\hbar$$

Величина  $K$  зависит от свойств обоих сверхпроводников и геометрии (толщины изолятора)



# Вывод основных уравнений Джозефсона

Из 3-его и 4-ого уравнений системы (3.6) следует (при равных справа числах  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ):

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial t} - \frac{\partial \chi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}$$

Второе фундаментальное уравнение, уравнение для фазы:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar} \quad (3.8)$$

Итак, (3.7) и (3.8) – основные соотношения для перехода Джозефсона.



# Стационарный эффект Джозефсона

1. «Стационарный» - ничего не зависит от времени  $t$ , т.е., например,  $\phi \neq \phi(t)$ .

2. В ур-нии для тока (3.7) нет времени явно, оно остается:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_c \sin \phi$$

Или  $I = I_c \sin \phi$ .

3. А из выражения (3.8) следует

$$\begin{aligned} V &= 0, \\ \phi &= \text{Const.} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Эта система уравнений (3.9) и есть

*основные уравнения стационарного эффекта Джозефсона*

# Уравнение $I = I_c \sin \phi$ для мостика

Асламазов-Ларкин получили для мостика выражение (случай  $L_{\text{эфф}} \ll \xi$ , т.е. короткая слабая связь)

$$I \equiv I_S = I_c \sin \phi$$

$$\text{где } I_c = C_0(T) \frac{\sqrt{\rho_1} \cdot \sqrt{\rho_2}}{\sigma_N \cdot R_N} = (\text{при } |\rho_1| = |\rho_2|) = C_0(T) \cdot \frac{\rho}{\sigma_N \cdot R_N}$$

Здесь  $C_0(T)$  – некоторая «постоянная» (зависящая от  $T$ ), произведение  $\sigma_N \cdot R_N$  – не зависит от  $R_N$ , а лишь от геометрии мостика, т.к.  $R_N \sim 1/\sigma_N$  ( $R_N$ -сопротивление мостика в  $N$ -состоянии,  $\sigma_N$ -удельная проводимость)

# Величина $I_c$ для мостика

Пример для «грязного» предела ( $l \ll \xi$ ). Теория Асламазова-Ларкина дает:

$$C_0 = \frac{\pi \cdot \sigma_N}{4ekT} \quad I_c = \frac{\pi \cdot \Delta^2}{4ekT} \cdot \frac{1}{R_N}$$

Я заменил  $\rho = |\Psi|^2 = \Delta^2$ . Вблизи  $T_c$  величина  $\Delta^2(T) = \frac{8\pi^2}{7 \cdot \zeta(3)} \cdot k^2 T (T_c - T)$

Здесь  $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$  - дзета-функция Римана,  $\zeta(3) = 1,202\dots$

Т.е. вблизи  $T_c$

$$I_c \approx 635 \cdot \frac{\Delta_c - \Delta}{R_N} \text{ мкА (Т в градусах К, } R_N \text{ в Омах).}$$

При  $T_c - T = 1$  К и  $R_N = 1$  Ом  $I_c \approx 600$  мкА

# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$

1. При наличии поля  $H$  ток в сверхпроводнике

$$\mathbf{j} = (e/m) \{ (i\hbar/2)(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) - (2e/c)\mathbf{A}|\Psi|^2 \} \quad (3.10)$$

$\mathbf{V} = \text{rot} \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$ -векторный потенциал,  $2e$ -заряд «частицы».

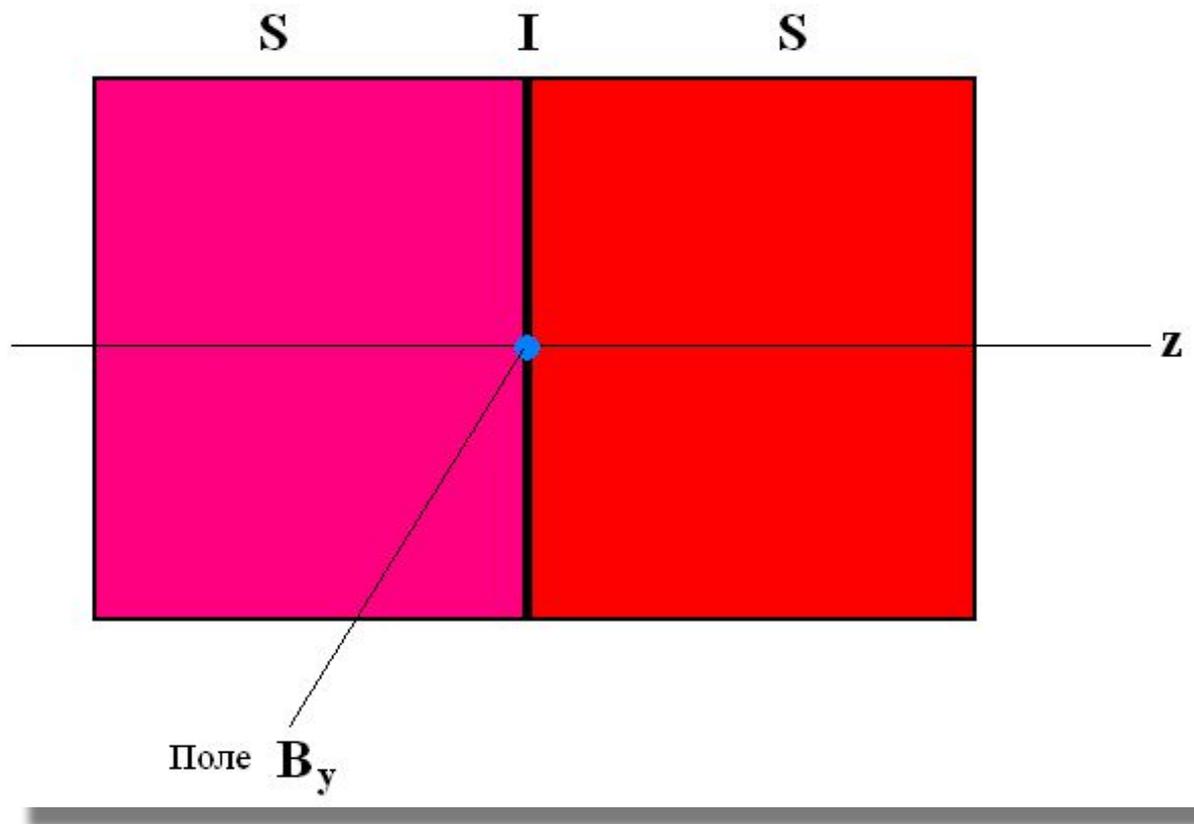
2.  $\Psi = \sqrt{\rho} \cdot e^{i\chi}$ ,  $\rho \neq \rho(\mathbf{r})$ .

Подставим в (3.10). Появится  $\nabla \chi$ . Определим тогда из (3.10) этот градиент фазы:

$$\nabla \chi = (2e/\hbar c) \{ \mathbf{A} + (mc/2e^2\rho)\mathbf{j} \} \quad (3.11)$$

3. Рассмотрим переход S-I-S

# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$



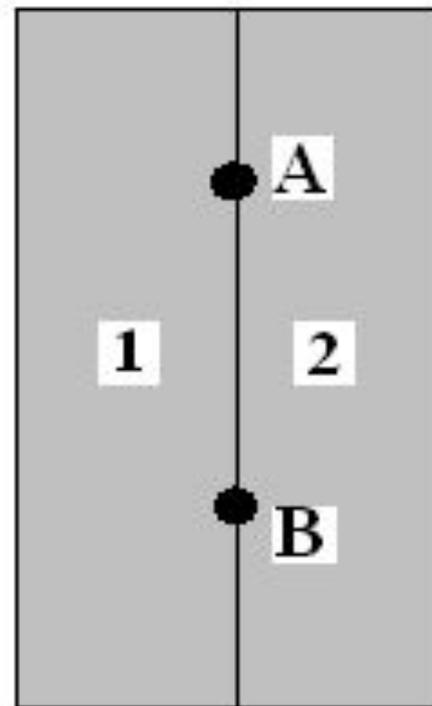
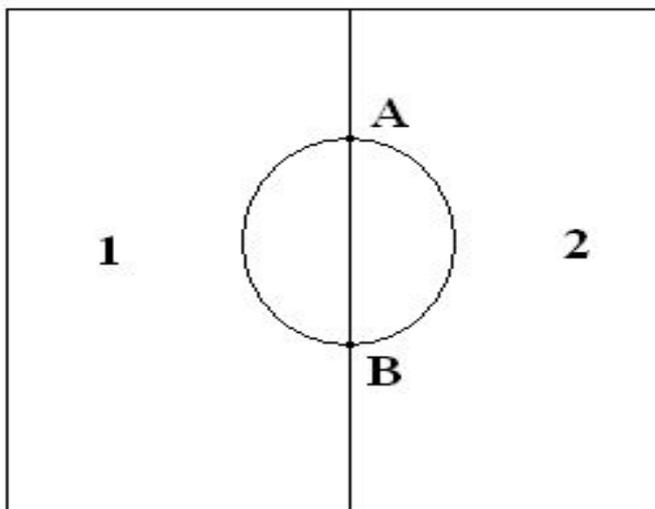
Поле  $H$  по оси  $y$ , т.е.  $B_y \neq 0$ ,  $B_x = B_z = 0$ . Оно сосредоточено в переходе

# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$

Рассмотрим 2 близкие точки на переходе (переход тонок)

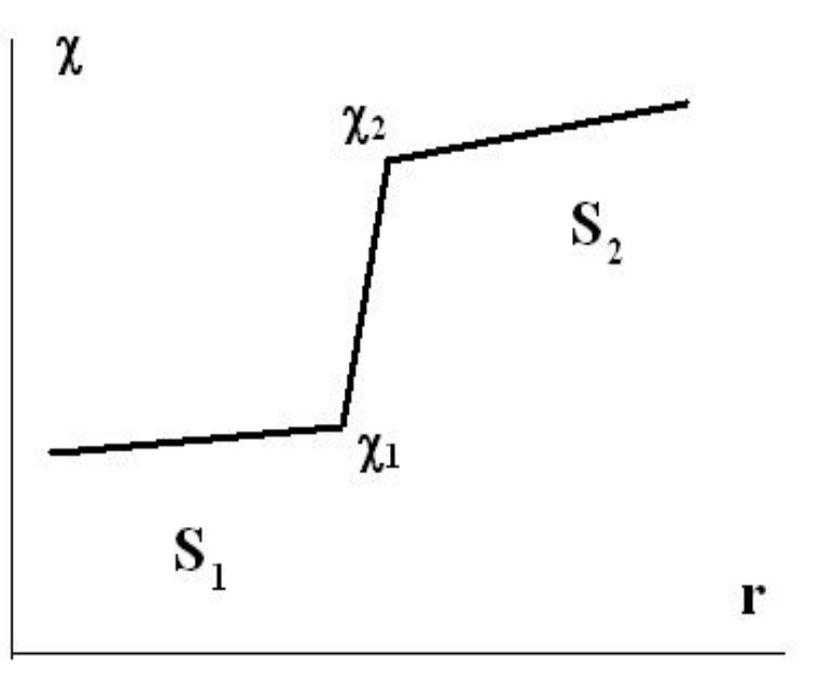
$$\phi_A = \chi_2(A) - \chi_1(A), \quad \phi_B = \chi_2(B) - \chi_1(B)$$

Контур  $S$  через эти точки



# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$

Проинтегрируем (3.11) по контуру  $S$



$$\int_S \nabla \chi \cdot d\mathbf{l} = \frac{2e}{\hbar c} \int_S \left( \mathbf{A} + \frac{mc}{2e^2 \rho} \mathbf{j} \right) d\mathbf{l} \quad (3.12)$$

$$\int_S \nabla \chi \cdot d\mathbf{l} = \varphi_{\hat{A}} - \varphi_{\hat{A}} = \delta \varphi \quad (3.13)$$

# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$

Правая часть (3.12):  $\int_S A dl = \delta \hat{O}$  - поток в контуре  $S$  (3.14)

$$\int_S j dl = 0$$

Действительно,  $j_2 - j_1 = \delta j$ ,  $\delta j \cdot dl$  - второй порядок малости

Из (3.12)-(3.15) получим

$$\delta \phi = (2e/\hbar c) \delta \Phi$$

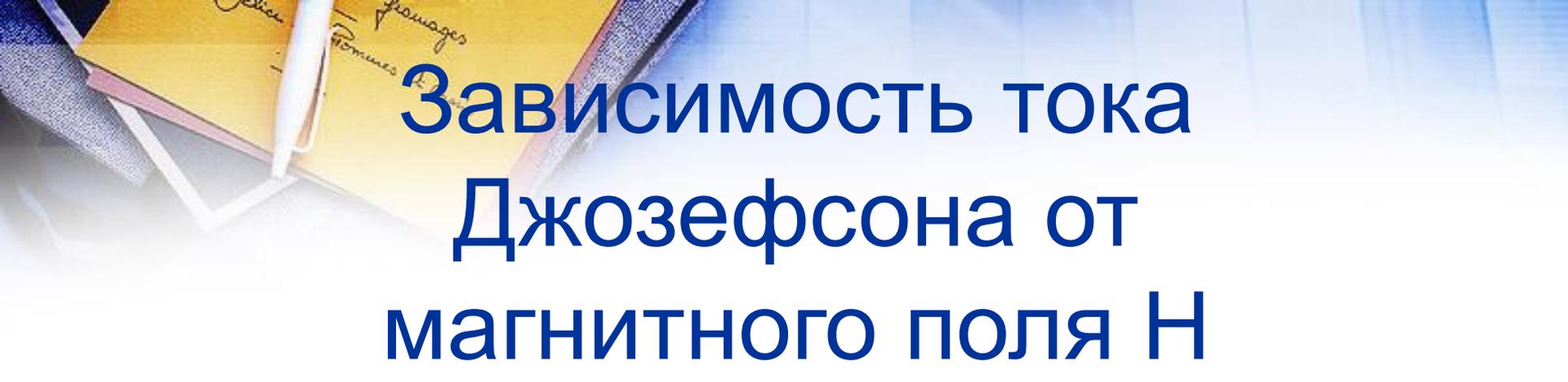
где  $\delta \Phi = B_y \cdot d \cdot \delta x$ ,

$\delta x = x_A - x_B$  - расстояние между точками  $A$  и  $B$ ,

$$d = d_0 + \lambda_1 + \lambda_2,$$

$d_0$  - толщина изолятора,  $\lambda_1, \lambda_2$  - глубины проникновения поля в СП-и.

*Поле проникает и в металл!*



# Зависимость тока Джозефсона от магнитного поля $H$

Подставив  $\delta\Phi$  в  $\delta\phi$ , получим

$$d\phi/dx = (2ed/\hbar c)B_y. \quad (3.16)$$

Т.е.  $\delta\phi \sim B$ , т.е. магнитному полю. **Очень важный результат**

Проинтегрируем (3.16) по  $x$ :

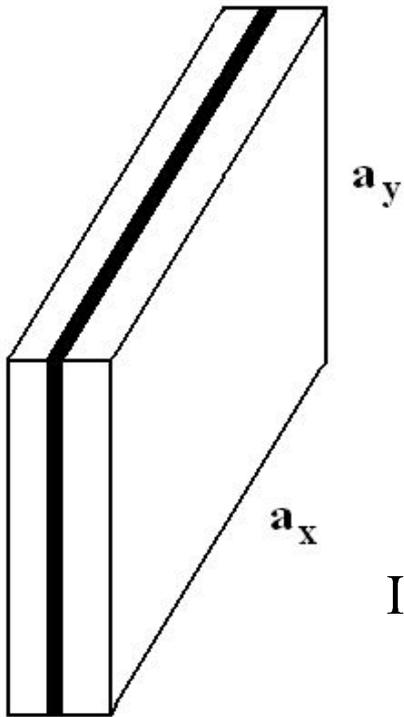
$$\phi = (2ed/\hbar c)B_y \cdot x + \phi_0. \quad (3.17)$$

Здесь  $\phi_0 = \text{Const}$ , это фаза в точке, принятой нами за начало отсчета.

Вывод: поскольку  $j = j_c \sin\phi$ , то при наличии поля плотность тока разная в разных точках перехода ( $\phi = \phi(x)$ )

# Максимальный ток через переход как функция $H$

$S = a_x \cdot a_y$  – прямоугольный переход



Полный ток через переход:

$$I = \int_{-\frac{a_x}{2}}^{+\frac{a_x}{2}} \int_{-\frac{a_y}{2}}^{+\frac{a_y}{2}} j_c \cdot \sin\varphi \cdot dx \cdot dy$$

Здесь: начало интегрирования в центре,  $dx \cdot dy$  – элемент площади,  $B_y \neq 0$ ,  $\varphi = \varphi(x)$  – см. (3.17),  $j_c$  – максимальная плотность тока без поля

$$I = j_c \cdot a_x \cdot a_y \cdot \frac{\sin\left(\frac{e \cdot d}{\hbar \cdot c} a_x B_y\right)}{\frac{e \cdot d}{\hbar \cdot c} a_x B_y} \sin\varphi_0 = I_m \sin\varphi_0 \quad (3.18)$$

# Максимальный ток через переход как функция $H$

В (3.18) мы обозначили максимальный ток как  $I_m$ . Это критический ток, но в поле  $H \neq 0$ . Из (3.18) находим

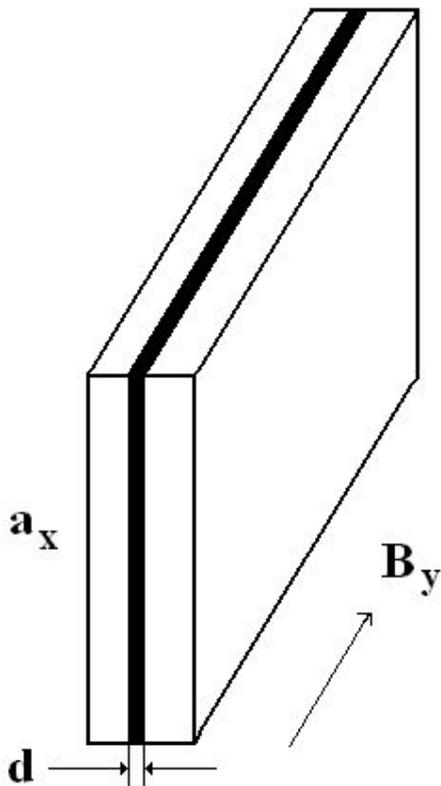
$$I_m = I_c \cdot \frac{\left| \sin \frac{\pi \cdot \hat{O}}{\hat{O}_i} \right|}{\frac{\pi \cdot \hat{O}}{\hat{O}_i}}$$

$$\Phi = B_y a_x d$$

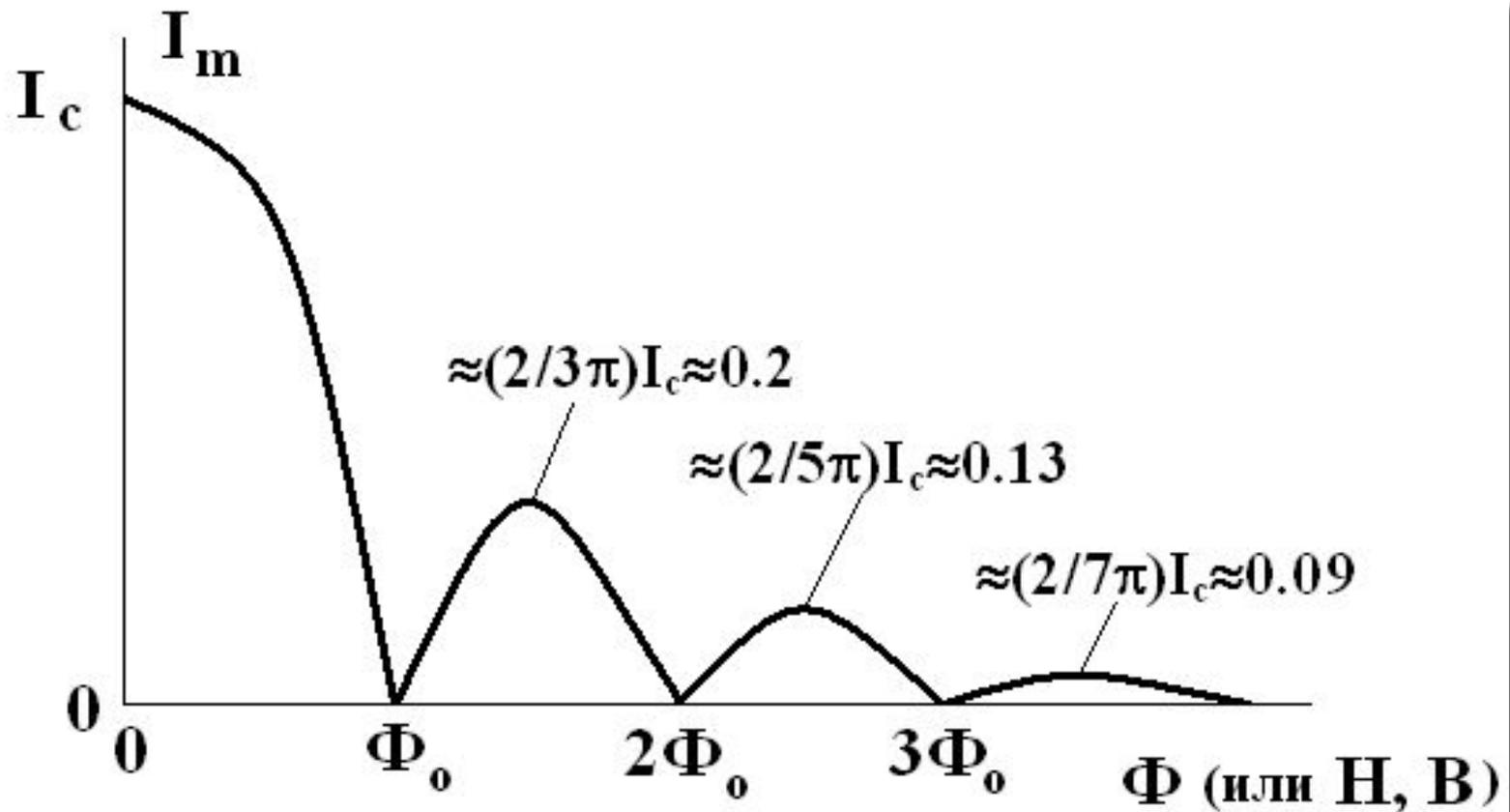
$$A \Phi_0 = hc/2e = 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2$$

(CGSM)

$$I_c = j_c \cdot a_x \cdot a_y - \text{максимальный ток без поля}$$

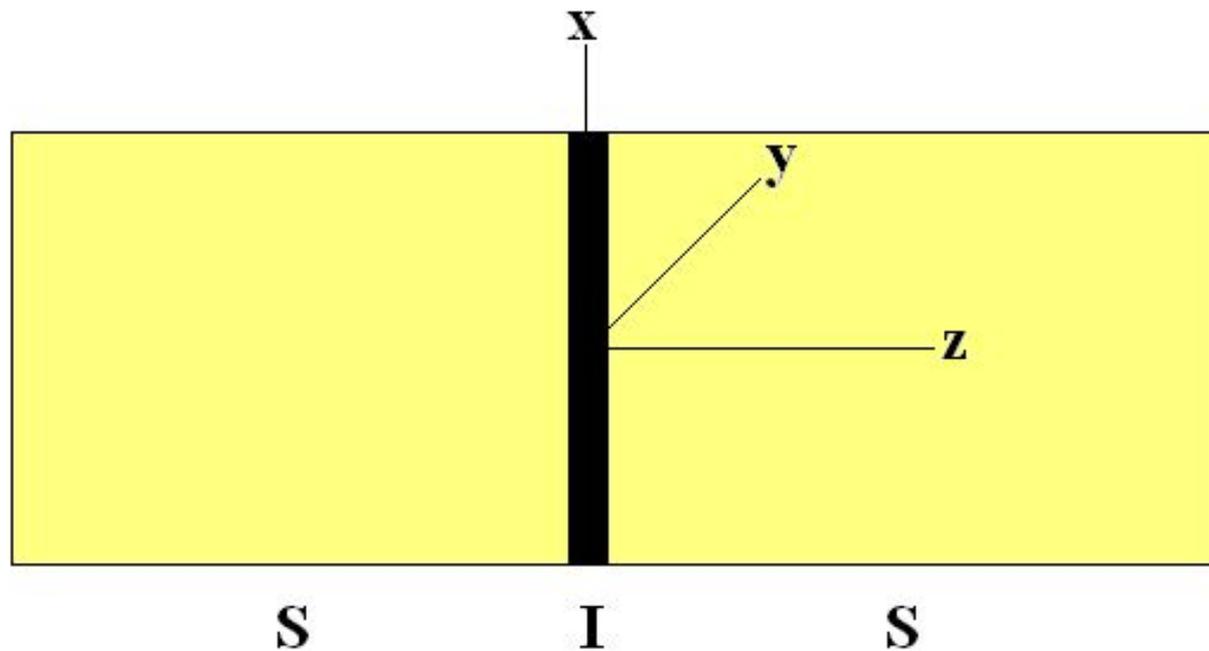


# Максимальный ток через переход как функция $H$



Так максимальный ток зависит от поля (потока в переходе)

# Джозефсоновская глубина проникновения



Считаем,  $H_{\text{внеш}} = 0$ ,  
 $B_y \neq 0$ ,  $B_y$  – поле собственного тока  
Считаем также, что **только**  $B_y \neq 0$ , а  $B_x = 0$



# Джозефсоновская глубина проникновения

$$d\phi/dx = (2ed/\hbar c)N_y \quad (\text{см. формулу 3.16}) \quad (3.20)$$

Здесь заменили  $V_y \rightarrow N_y$  (в переходе-диэлектрике  $\mu=1$ );  
 $d = d_0 + \lambda_1 + \lambda_2$  – «эффективная» толщина барьера.

3) В диэлектрике-переходе справедливы уравнения Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j} + (1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t \quad (3.21)$$

Сейчас мы пренебрежем емкостью перехода, и значит токами смещения  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ .  
Для принятой геометрии (3.21) будет

$$dN_y/dx = (4\pi/c)j_z$$

Полная производная, т.к. у нас только  $N_y \neq 0$

Сюда подставим  $N_y$  из (3.20)

$$(\hbar c^2/8\pi ed)d^2\phi/dx^2 = j_z = j_c \sin\phi$$



# Джозефсоновская глубина проникновения

Это можно переписать как

$$d^2\phi/dx^2 = \sin\phi/\lambda_J^2 \quad (3.22)$$

где  $\lambda_J$  имеет размерность длины

$$\lambda_J = \sqrt{\hbar c^2 / 8\pi e d j_c} \quad (3.23)$$

Вообще-то и  $H_x \neq 0$ , поэтому в общем случае в (3.22) должен быть и член  $d^2\phi/dy^2$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d^2\phi}{dy^2} = \frac{\sin\phi}{\lambda_J^2} \quad (3.22A)$$

Это уравнение Феррела-Прейнджа



# Джозефсоновская глубина проникновения

Если  $\phi$  мало (обычно все же собственные токи и создаваемые ими поля  $\mathbf{H}$  малы), то (3.22) будет:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\phi}{\lambda_J^2}$$

Решение этого уравнения (за начало координат возьмем точку с максимальным током):

$$\phi = \phi_0 \exp(-x/\lambda_J) \quad (3.24)$$

Здесь  $\phi_0$  - фаза в начале координат (где ток максимален).

Видно, что ток экспоненциально затухает с ростом  $x$ . Т.е.  $\lambda_J$  - это **глубина проникновения Джозефсоновских токов** в большой переход

# Джозефсоновская глубина проникновения

Оценка  $\lambda_J$ :

$$j_c = 1 \text{ A/cm}^2$$
$$d = d_0 + \lambda_{L1} + \lambda_{L2} \sim 10^3 \text{ \AA}$$

Подставьте в формулу (3.23) для  $\lambda_J$ . Получим  $\lambda_J = 0.5 \text{ мм}$  (типично 0.1-1 мм)

