Лекция 24

Спектральное распределение энергии излучения релятивистского заряда

Фурье-компонента напряжённости магнитного поля

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{e}{c^2|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\cdot\frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}_0}{c}\right),\dot{\mathrm{v}}_0(t_0)\right]\right]\exp\left(\mathrm{i}\omega t_0\left(1-\frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right)dt_0$$

Спектральное распределение энергии излучения

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} \qquad (24.3)$$

$$\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}_0}{c}\right), \dot{\mathbf{v}}_0\left(\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right)\right]\right]$$

$$\dot{\mathbf{v}}_0\left(\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right)$$

– фурье-компонента ускорения для значения частоты, равного $\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)$

Спектральное распределение энергии излучения на низких частотах

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \left(\frac{(\Delta \mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} - \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{(\mathbf{n}\Delta \mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^4} \right)$$

Спектральное распределение энергии излучения на низких частотах

Если характерное время, в течение которого действует ускорение, есть τ, то характерная частота в спектральном распределении (24.3) по порядку величины равна

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\tau\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)} \tag{24.6}$$

Поскольку излучение сосредоточено в основном в узкой угловой области $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - v/c}$ вблизи направления движения частицы, то из (24.6) следует

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\tau\left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \sim \frac{1}{\tau\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}$$

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\omega) = \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\int \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}'\right)\mathbf{j}(\mathbf{R}',\omega)dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\omega) = \frac{\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\int \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}'\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathrm{i}\omega t)e\dot{\mathbf{R}}_0(t)\delta\left(\mathbf{R}'-\mathbf{R}_0(t)\right)dt dV' =$$

$$\frac{e\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\mathbf{R}}_0(t)\exp\left(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t)\right)dt$$

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{R}}_0(t)\right] \exp\left(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t)\right) dt \right|^2 \tag{24.8}$$

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

Формула (24.8) содержит скорость частицы $\dot{\mathbf{R}}_0(t)$ и, на первый взгляд, может показаться, что из (24.8) следует вывод о возможности излучения равномерно движущегося заряда. Но это не так. Если частица движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$, то $\mathbf{R}_0(t) = \mathbf{v}_0 t$.

$$\int\limits_{-T/2}^{T/2} [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \exp\left(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_0 t\right) dt = 2\,[\mathbf{n}, \mathbf{v}_0]\,\frac{\sin\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\frac{T}{2}}{\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)} \qquad (24.9)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \exp\left(\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_0 t\right) dt = [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0]\,\delta\left(\omega - \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_0\right) \qquad (24.10)$$

Выражение (24.10) при $T \to \infty$ стремится к δ-функции (24.9) (т.е. обращается в нуль). Физически это означает, что поле излучения от конечного участка траектории частицы отлично от нуля, но при сложении полей со всех участков траектории поля гасятся и результирующее поле будет равно нулю.

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{n},\dot{\mathbf{R}}_0(t)\right]\exp\left(\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t)\right)dt\right|^2=$$

$$\int\limits^{\infty}\int\limits^{\infty}dt_1dt_2\left[\mathbf{n},\mathbf{v}_1\right]\left[\mathbf{n},\mathbf{v}_2\right]\exp\left(\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)-\mathrm{i}\mathbf{g}\mathbf{n}\right)=$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt_1dt_2\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2+\left(\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}}\right)\left(\mathbf{v}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}}\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)-\mathrm{i}\mathbf{g}\mathbf{n}\right)$$

$$\mathbf{v}_1=\dot{\mathbf{R}}_0(t_1),\ \ \mathbf{v}_2=\dot{\mathbf{R}}_0(t_2),\quad \mathbf{g}=\frac{\omega}{c}(\mathbf{R}_0(t_1)-\mathbf{R}_0(t_2))$$

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 G(t_1, t_2) \exp\left(\mathrm{i}\omega(t_1 - t_2)\right)$$

$$G = \left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \left(\mathbf{v}_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}}\right)\left(\mathbf{v}_2\frac{\partial}{\partial\mathbf{g}}\right)\right) 4\pi\frac{\sin g}{g} =$$

$$4\pi\left\{\frac{\sin g}{g}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \left(\mathbf{v}_1\frac{\mathbf{g}}{g}\right)\left(\mathbf{v}_2\frac{\mathbf{g}}{g}\right)\right) + \right.$$

$$\left.\left(\frac{\cos g}{g^2} - \frac{\sin g}{g^3}\right)\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - 3\left(\mathbf{v}_1\frac{\mathbf{g}}{g}\right)\left(\mathbf{v}_2\frac{\mathbf{g}}{g}\right)\right)\right\}$$

Спектральное распределение энергии излучения в общем случае

Проанализируем полученную формулу в случае заряда ультрарелятивистской энергии (противоположный, нерелятивистский, предельный случай интереса не представляет, поскольку сводится к формуле дипольного излучения).

$$\omega \Delta t_{eff}\left(1-\frac{v}{c}\right)\sim 1$$

$$g_{eff}\sim\frac{1}{1-\frac{v}{c}}\sim\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2\gg 1$$

$$G=4\pi\frac{\sin g}{g}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2-\frac{1}{g^2}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{g}\right)\left(\mathbf{v}_2\mathbf{g}\right)\right)$$