<u>Лекция 11.</u>

Движение электронов во внешнем стационаром магнитном поле. Траектория, по которой движется электрон в магнитном поле. Понятие годографа. Циклотронная эффективная масса. Диамагнитный резонанс. Представление расширенных зон.

Магнитное поле энергии не меняет, следовательно, примитивный учет его как дополнительное слагаемое в гамильтониане – невозможен. Однако здесь работает другой простой подход.

$$H = 0 \to\to\to\to H \neq 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$E_n(\hbar\vec{q}) \to\to E_n\left(\hbar\vec{q} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)$$

Энергия как функция остается неизменной; но

$$rot\vec{A} = \vec{H}$$

меняется ее аргумент (градиентная инвариантность).

То есть теперь $\vec{p} = \hbar\vec{q} - \frac{e}{c}\vec{A}$ - (новый) кинематический квазиимпульс. Как он меняется со временем?

$$\left(\hbar\vec{q} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) = ?$$

Оценим, сколь сильно влияет магнитная добавка на изменении квазиимпульса.

$$\vec{A} = \left(-Hy, 0, 0\right) \rightarrow rot\vec{A} = \left(0, 0, H\right)$$ - калибровка Ландау.

$$\hbar\vec{q} - \frac{e}{c}\vec{A} = \left(p_x + \frac{eH}{c}y, p_y, p_z\right) \qquad \vec{p} \equiv \hbar\vec{q}$$

Следовательно, влияние магнитного поля оценивается отношением $\rightarrow$

$$\frac{\frac{eH}{c}\left|y\right|}{p_x} \square \frac{\frac{eH}{c}a}{p_x} \square \frac{\frac{eH}{c}\,\frac{\square}{p_F}}{p_F} \square \frac{\square\left(\frac{eH}{cm^*}\right)}{p_F^2/m^*} \square \frac{\square\omega_*}{\varepsilon_F}$$

Здесь $\omega_* = \dfrac{eH}{cm^*}$ -циклотронная (Ларморова) частота.

y - декартова координата - локализация электрона, ограниченная размерами ячейки.

$a\cdot p_F \square \square$

$p_x \square p_F$

$$\square\omega_* = \square\frac{eH}{cm^*}\square \cancel{10^{-27}}\,\frac{5\cdot10^{-10}\cdot 1\,гс}{3\cdot10^{10}\cdot\cancel{10^{-27}}}\;\underbrace{\left[H\right]}_{\square\;\square} \qquad \square\,10^{-20}\frac{\left[H\right]\,эрг}{1{,}6\cdot10^{-12}\,\frac{эрг}{eV}}$$

числен. знач. поля

(без размерн.)

$$\square\,10^{-8}\left[\,H\,\right]eV$$

Таким образом, отношение характерной магнитной энергии к энергии Ферми составляет

$$\frac{\hbar\omega_*}{\varepsilon_F} \sim \frac{10^{-8}[H]}{10} \sim 10^{-9}\underbrace{\left(10^4 \div 10^5\right)}_{[H]}$$

Это ничтожно малый параметр по сравнению с параметром адиабатичности $\sim 10^{-3}$.

$$\boxed{\frac{\frac{eH}{c}|y|}{p_x} \sim 10^{-5} \div 10^{-4}}$$

Таким образом, на размерах ячейки можно считать поле постоянным, и можно провести разложение.

□ □ □• □□

$$\left(\square\overset{\square}{q}-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right)=\frac{i}{\square}\left[E_n\left(\square\overset{\square}{q}-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right),\ \square\overset{\square}{q}-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right]$$

Тогда уравнение движения :

$$\square\overset{\square}{q}=\frac{i}{\square}\left[E_n(\square\overset{\square}{q})+\frac{\partial E_n(\square\overset{\square}{q})}{\partial\square\overset{\square}{q}}\cdot\left(-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right)+\ldots,\square\overset{\square}{q}-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right]\square$$

$$\square\,\frac{i}{\square}\left\{\left[\cancel{E_n(\square\overset{\square}{q}),\square\overset{\square}{q}}\right]_0+\underset{\substack{\text{групповая}\\\text{скорость}}}{\frac{\partial E_n(\overset{\square}{q})}{\square\partial q_\alpha}}\cdot\left(-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right)\left[A^\alpha,\square\overset{\square}{q}\right]+\left[E_n(\square\overset{\square}{q}),-\frac{e}{c}\overset{\square}{A}\right]+\ldots\right\}$$

$\left[A^\alpha,\square\overset{\square}{q}\right]$ - это не векторное произведение, это коммутатор.

$$A^\alpha=-H\overset{\square}{y}\delta^{\alpha x}$$

$$\square\dot{q}_x \,\square\, \frac{i}{\square}\left\{-\frac{e}{c}V_n^x H\left[\cancel{-\square y,\square q_x}\right]_0+\left[E_n(\square q),-\frac{e}{c}\left(-H\,\square y\right)\right]\right\}$$

Ограничимся движением внутри одной зоны (Ω не дает вклада);

$$\square y=i\frac{\partial}{\partial q_y}$$

$$\square\dot{q}_x\approx\frac{i}{\square}\left[E_n(\square q),\frac{eH}{c}i\frac{\partial}{\partial q_y}\right]=-\frac{1}{\square}\frac{eH}{c}\left\{\cancel{E_n\frac{\partial}{\partial q_y}}-\frac{\partial E_n}{\partial q_y}-\cancel{E_n\frac{\partial}{\partial q_y}}\right\}=\frac{eH}{c}\,\frac{\partial E_n}{\square\,\partial q_y}$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial p_y}=V_n^y$$

$$\square\dot{q}_y=\frac{i}{\square}\left\{-V_n^x\frac{e}{c}H\left[-i\frac{\partial}{\partial q_y},\square q_y\right]+\left[E_n(\square q),0\right]\right\}=-\frac{1}{\cancel{\square}}V_n^x\frac{eH}{c}\,\cancel{\square}\left[\frac{\partial}{\partial q_y},q_y\right]$$

$$\hbar\dot{q}_y = \frac{i}{\hbar}\left\{ -V_n^x \frac{e}{c} H\left[-i\frac{\partial}{\partial q_y}, \hbar q_y \right] + \left[E_n(\hbar\dot{q}), 0 \right] \right\} = -\frac{1}{\cancel{\hbar}} V_n^x \frac{eH}{c} \cancel{\hbar} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q_y}, q_y \right]}_{1}$$

$$\hbar\dot{q}_y = -\frac{eH}{c} V_n^x$$

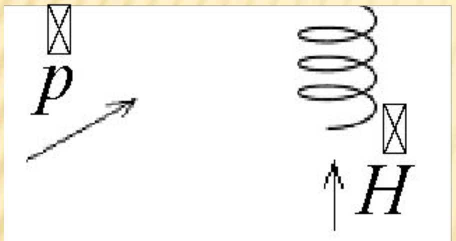
$$\hbar\dot{q}_z = 0$$

Таким образом, в линейном приближении окончательно мы получаем

$$\begin{cases} \hbar\dot{q}_x = \dfrac{eH}{c} V_n^y, \\ \hbar\dot{q}_y = -\dfrac{eH}{c} V_n^x, \\ \hbar\dot{q}_z = 0. \end{cases}$$

$$\dot{\vec p} \equiv \hbar\dot{\vec q} = \frac{e}{c}\left[\vec V_n \; \vec H\right] = \frac{e}{c}\begin{vmatrix} \vec e_x & \vec e_y & \vec e_z \\ V_n^x & V_n^y & V_n^z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}$$

-получилась вроде как магнитная составляющая



силы Лоренца; однако $\vec p$ - не импульс.

$$\dot p_z = 0 \rightarrow p_z = p_{z0} = const$$

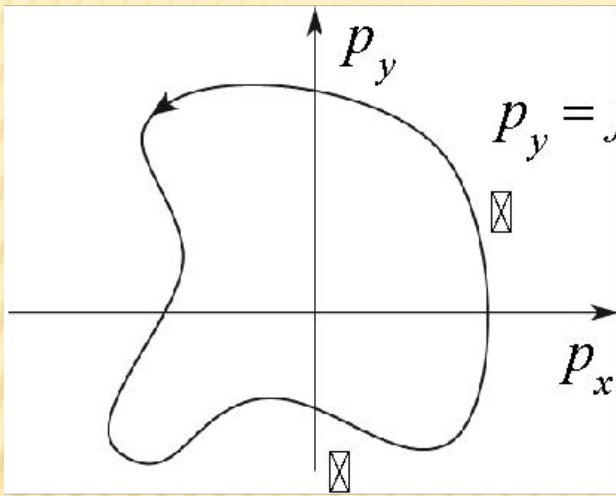
$$\frac{dE_n(\vec q)}{dt} = \frac{\partial E_n}{\hbar\partial \vec q}\left(\hbar\dot{\vec q}\right) = \left(\vec V_n, \frac{e}{c}\left[\vec V_0 \vec H\right]\right) \equiv 0$$

То есть $E_n\left(p_x, p_y, p_{z0}\right) \equiv E_0 = const'$

Это уравнение определяет в импульсном пространстве поверхность

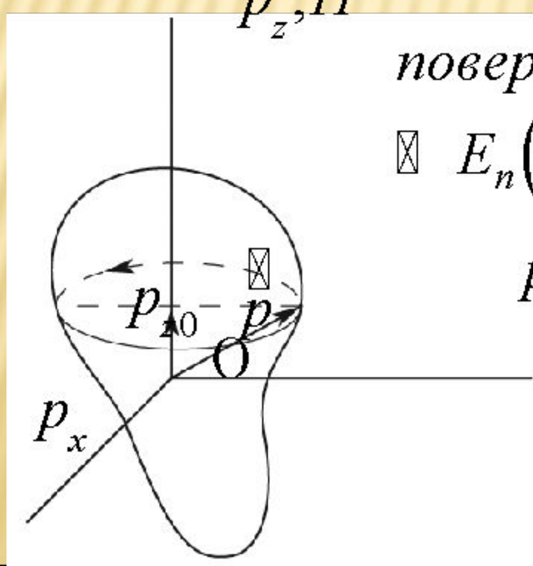
$$p_y = F\left(p_x; E_0, p_{z0}\right)$$

Зависимость $p_y\left(p_x\right)$ есть траектория, по которой движется электрон в импульсном пространстве. Эта кривая называется годограф.



$$p_y = f\left(p_x; E_0, p_{z0}\right)$$

p_z, H



поверхность

$$E_n\left(p_x, p_y, p_z\right) = E_0$$

p_y

Электрон, находящийся на этой поверхности при заданном значении E_0, в магнитном поле с нее никуда уйти не может.

$p_{z0} = const$, следовательно, проводим секущую плоскость $\perp OZ$;

Все точки получившейся кривой удовлетворяют двум условиям

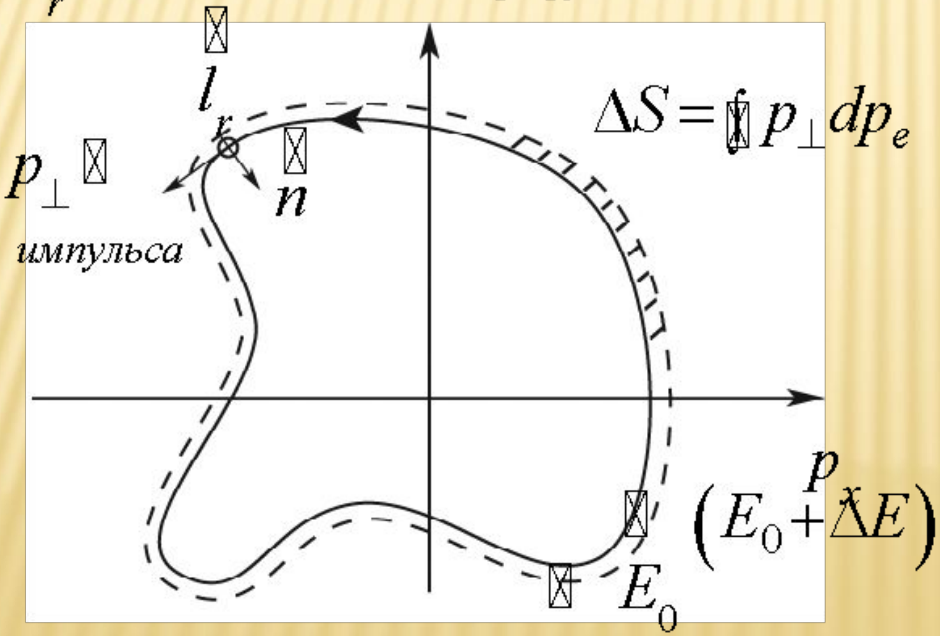
$$\left(p_{z0} = const; \;\; E_0 = const \right)$$

Введем три вектора:

$\vec{l}$ - касательная к годографу;

$\vec{n}$ - нормаль к годографу;

$\vec{l}_r \in$ плоскости $\perp$ годографу.



$$\vec{p} \equiv \hbar\vec{q} = \frac{e}{c}\left[\vec{V}_n \vec{H}\right] \qquad \times \vec{l}$$

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt} = \frac{eH}{c}\left(\vec{l}\left[\vec{V}_n \vec{l}_z\right]\right) = \frac{eH}{c}\left(\vec{V}_n\left[\vec{e}_z \vec{l}\right]_n\right) = \frac{eH}{c} V_n^{\perp}$$

$dt = \frac{c}{eH}\frac{dp_l}{V_n^{\perp}}$ - интервал времени, за который электрон пройдет участок dp_l. Двигаясь по замкнутой кривой, электрон рано или поздно вернется в исходную точку.

Период такого движения : $T = \frac{c}{eH}\oint\frac{dp_l}{V_n^{\perp}} \equiv \frac{2\pi}{\omega_H^{*}}$.

$$\omega_H^* = \frac{1}{\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{c}{eH}\oint \dfrac{dp_l}{V_n^{\perp}}} \equiv \frac{eH}{cm_H^*}$$

$$\boxed{m_H^* \equiv \frac{1}{2\pi}\oint \frac{dp_l}{V_n^{\perp}}}$$ - циклотронная эффективная масса.

Чем больше длина годографа (охватываемая им площадь), тем больше масса.

$$p_{\perp} = \frac{1}{\dfrac{\partial E_n}{\partial p_{\perp}}}\Delta E = \frac{1}{V_n^{\perp}}\Delta E$$

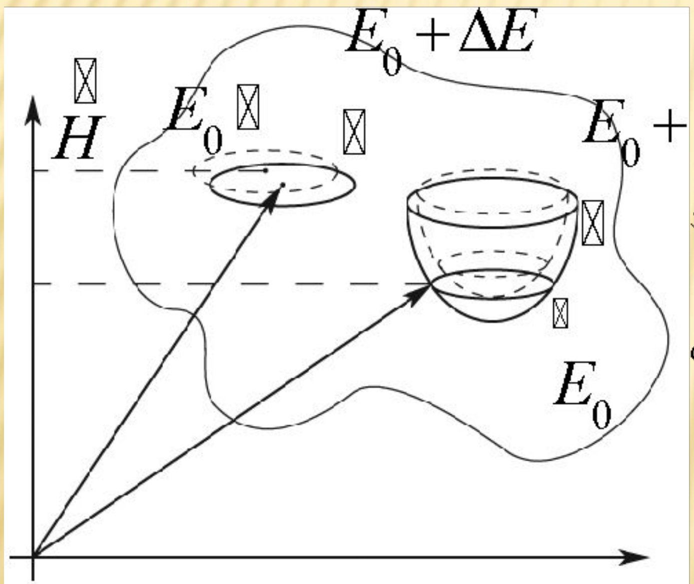
$$\Delta S = \oint \frac{1}{V_n^{\perp}} dp_l \Delta E$$

$$\oint \frac{dp_l}{V_n^{\perp}} = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

$$\boxed{m_H^* = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S(E, p_z)}{\partial E}}$$

Таким образом, эффективная масса определяется скоростью изменения площади, охваченной годографом при изменении энергии.

На поверхности постоянной энергии могут быть невыпуклые области.



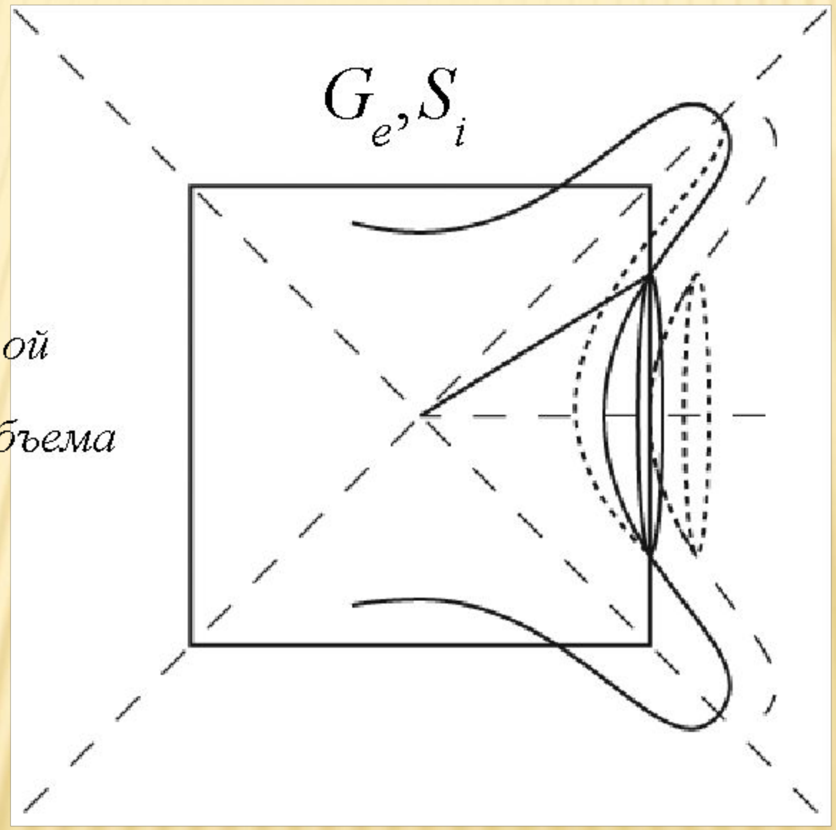
этот годограф "сожмется"

$\rightarrow$ *отрицательная эффективная*

с приростом энергии *масса*

В силу симметрии (например, кубическая решетка), исходная поверхность постоянной энергии – куб, взаимодействие “растягивает” его по диагоналям.
Если поле направлено перпендикулярно грани, то реализуется ситуация отрицательной циклотронной эффективной массы.

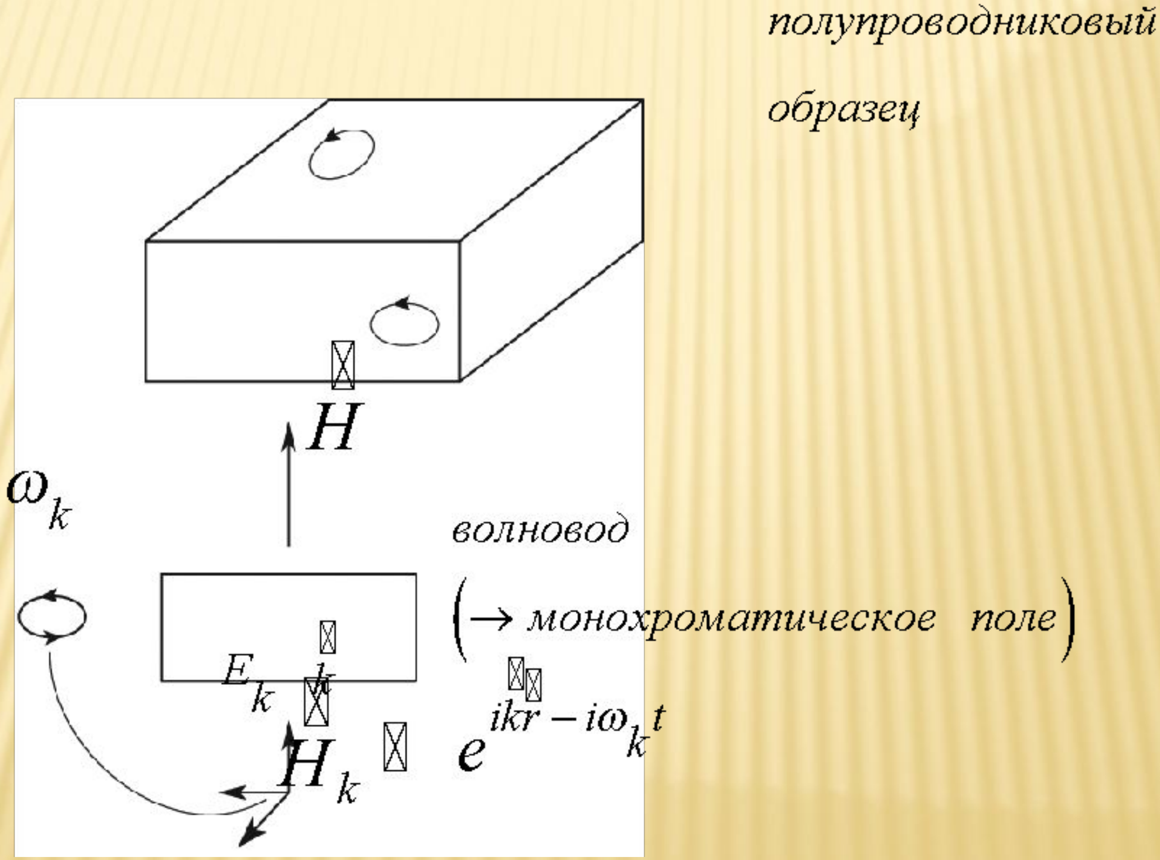
куб тянем по главной диагонали с сохр. объема



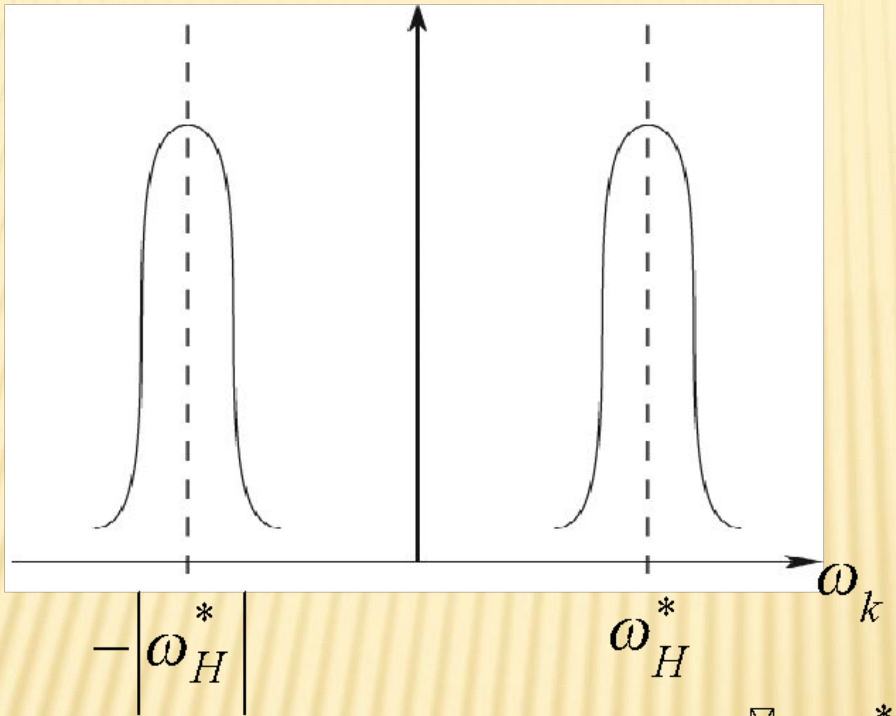
В некотором магнитном поле у каждой частицы – свой годограф.

Если частоты вращения поля ω_k и вращения электрона по годографу не совпадают, ничего не происходит; если совпадают – в системе покоя электрона на него действует постоянное электронное поле, которое перемещает (разгоняет) электрон!

Электрон поглощает квант поля $\hbar\omega_k$.



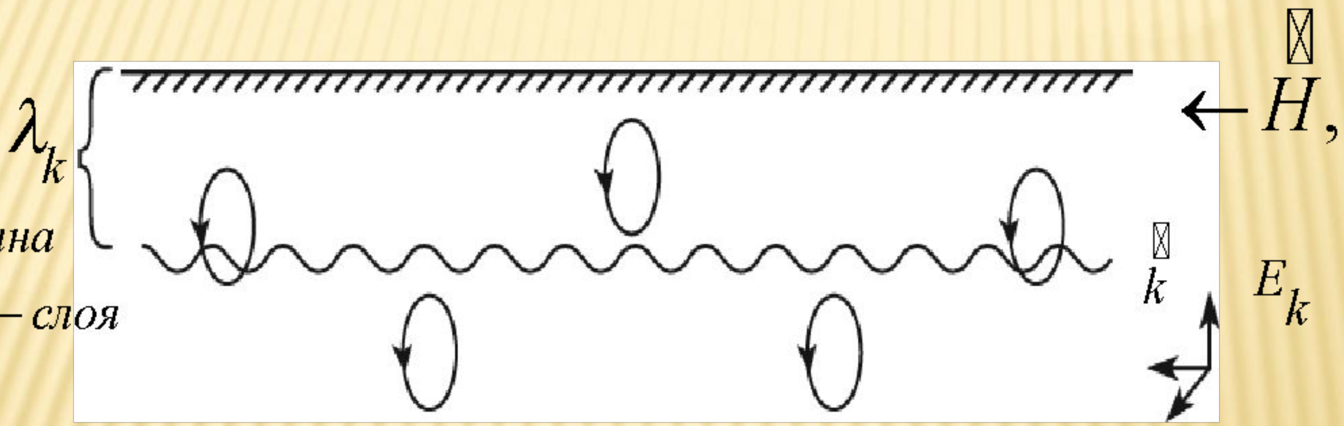
Поляризуем волну по кругу.



m_H^*

Диамагнитный резонанс. По пикам можно вычислить ω_H^* и m_H^*.

Если это не полупроводник, а металл, то магнитное поле проникает только на глубину скин – слоя; электроны будут вести себя по разному:



Для годографов, частично попадающих в скин – слой, электроны ускоряются подобно циклотронным – на участках пути, где приложено поле.
Тогда (при совпадении частот) получаем пик поглощения - <u>циклотронный резонанс.</u>