Лекция 5.

Диэлектрическая проницаемость электронного газа. Поляризационный оператор. Экранировка внешнего заряда электронным газом различной плотности. Фриделевские осцилляции. Собственные возбуждения в электронном газе, плазмоны.

Диэлектрическая проницаемость электронного газа –

- величина, наиболее полно описывающая эффект электростатического взаимодействия в системе взаимодействующих электронов, поскольку фактически диэлектрическая проницаемость – реакция системы на внешний заряд.

Уравнения Максвелла для истинного электрического поля и электрической индукции в среде $div\vec{E} = 4\pi e\rho_t$ и $div\vec{D} = 4\pi e\rho_{ext}$ связывают $\vec{E}$ с полным зарядом системы $\rho_t = \rho_{ext} + \rho_{ind}$ (с учетом перестройки собственных зарядов как реакции на появление ρ_{ext} и, как следствие, - возникновение ρ_{ind}), а $\vec{D}$ - с внешним ρ_{ext} .

Поскольку все уравнения – линейны, то можем считать все фигурирующие величины представленными лишь одной Фурье – компонентой.

В результате уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} i\left(\vec{q}\vec{E}\left(\vec{q},\omega\right)\right) = 4\pi e \rho_t\left(\vec{q},\omega\right), \\ i\left(\vec{q}\vec{D}\left(\vec{q},\omega\right)\right) = 4\pi e \rho_{ext}\left(\vec{q},\omega\right). \end{cases}$$

Отсюда, для продольных(вдоль $\vec{q}\,!$) составляющих поля и индукции получаем соотношение:

$$\frac{D_{\parallel}\left(\vec{q},\omega\right)}{E_{\parallel}\left(\vec{q},\omega\right)} = \frac{\rho_{ext}\left(\vec{q},\omega\right)}{\rho_t\left(\vec{q},\omega\right)}$$

Но с другой стороны связь $D_{\parallel}$ и $E_{\parallel}$ определяет продольную диэлектрическую проницаемость:

$$D_{\parallel}\left(\vec{q},\omega\right) = \varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)E_{\parallel}\left(\vec{q},\omega\right) \quad , \quad \text{т.е.} \qquad \varepsilon\left(\vec{q},\omega\right) = \frac{\rho_{ext}\left(\vec{q},\omega\right)}{\rho_{ext}\left(\vec{q},\omega\right) + \rho_{ind}\left(\vec{q},\omega\right)} \quad ,$$

так что найдя при заданном $\rho_{ext}\left(\vec{q},\omega\right)$ отклик системы в виде возникающего $\rho_{ind}\left(\vec{q},\omega\right)$, мы получим и $\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)$.

Работать технически будем в приближении самосогласованного поля – возмущающий внешний заряд перераспределяет собственные заряды системы, что приводит и к изменению как их взаимодействия между собой, так и с этим внешним зарядом. Каждый отдельный электрон чувствует теперь поле, возникшее как от внешнего заряда, так и от перестроившихся других электронов – в этой "перестройке" уже есть доля и самого рассматриваемого электрона. При этом приближение будет состоять в том, что поле перестроившихся электронов мы будем рассматривать как усредненное по всему объему, т.е. фактически – сглаженное, и тем самым – пренебрегать флуктуациями. Ясно физически, что это приближение будет тем лучше, чем выше плотность электронов(как всегда в статистике флуктуации $\sim \frac{1}{\sqrt{N}}(!)$).

Итак, мы будем искать истинную электронную плотность в каждой точке, возникающую в результате действия в системе результирующего потенциал

$$V_t = e\left\{\varphi_t(\vec{q},\omega)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t} + \varphi_t^* e^{-i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}\right\}$$ - величины действительной.

$\Delta\varphi_t(\vec{r},\vec{t}) = -4\pi e\rho_t(\vec{r},t)$, что в Фурье – представлении дает

$$-q^2\varphi_t(\vec{q},\omega) = -4\pi e\rho_t(\vec{q},\omega), \text{ или } \varphi_t(\vec{q},\omega) = \frac{4\pi e}{q^2}\rho_t(\vec{q},\omega).$$

Что касается полной плотности ρ_t, то мы получим ее как среднее значение от оператора плотности:

$$\rho_t = \left\langle \{n\} \middle| \hat{\rho}(\vec{r}) \middle| \{n\} \right\rangle = \left\langle \{n\} \middle| \sum_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \middle| \{n\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \{n\} \middle| \sum_{\substack{\vec{k},\vec{k}' \\ \sigma\sigma'}} \hat{a}^{+}_{\substack{\vec{k} \\ \sigma}} \hat{a}_{\substack{\vec{k}' \\ \sigma'}} \sum_\xi \int d\vec{r}_a \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r}_a)\chi^*_\sigma(\xi)\delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)\psi_{\vec{k}'}(\vec{r}_a)\chi_{\sigma'}(\xi) \middle| \{n\} \right\rangle =$$

$$= \sum_\sigma \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi_{\vec{k}'}(\vec{r}) \left\langle \{n\} \middle| \hat{a}^{+}_{\substack{\vec{k} \\ \sigma}} \hat{a}_{\substack{\vec{k}' \\ \sigma'}} \middle| \{n\} \right\rangle = \sum_\sigma \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \left|\psi_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2$$

Здесь $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ - истинная одночастичная электронная ψ -функция, возникающая в результате самосогласованного воздействия на каждый электрон.

Наша задача – найти $\psi_{\vec k}$, возникшую в результате воздействия $\hat V_t$ на первоначально однородное распределение электронов с волновой функцией

$$\psi^{(0)}_{\vec k}(\vec r,t)=\frac{e^{i\vec k\vec r}}{\sqrt{\Omega}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k}t}$$

Уравнение Шредингера (в нестационарном случае):

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\vec r,t)}{\partial t}=\hat H\psi(\vec r,t),\quad \hat H=\hat H_0+\hat V_t.$$

Ищем $\psi(\vec r,t)=\sum_{\vec k}C_{\vec k}(t)\psi^{(0)}_{\vec k}(\vec r,t)$, так что : $i\hbar\frac{\partial C_{\vec k'}(\vec r,t)}{\partial t}\sum_{\vec k'}V_{\vec k',\vec k_1}(t)C_{\vec k_1}(t)$, где

$$V_{\vec k'\vec k_1}=\int d\vec r\,\psi^{*(0)}_{\vec k'}(\vec r,t)V_t(\vec r,t)\psi_{\vec k_1}(\vec r,t)=$$

$$=\int d\vec r\,\frac{e^{-i\vec k'\vec r}}{\sqrt{\Omega}}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k'}t}\cdot e\left[\varphi_t(\vec q,\omega)e^{i\vec q\vec r-i\omega t}+\varphi^*_t(\vec q,\omega)e^{-i\vec q\vec r+i\omega t}\right]\frac{e^{-i\vec k_1\vec r}}{\sqrt{\Omega}}\cdot e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k_1}t}=$$

$$=e\varphi_t(\vec q,\omega)\cdot e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec k'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k_1}}{\hbar}\right)t-i\omega t}\cdot\overbrace{\frac{1}{\Omega}\int d\vec r e^{i\left(-\vec k'+\vec q+\vec k_1\right)\vec r}}^{\delta_{\vec k_1,\vec k'-\vec q}}+e\varphi^*_t(\vec q,\omega)\cdot e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec k'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k_1}}{\hbar}\right)t+i\omega t}\cdot\underbrace{\frac{1}{\Omega}\int d\vec r e^{i\left(-\vec k'-\vec q+\vec k_1\right)\vec r}}_{\delta_{\vec k_1,\vec k'+\vec q}}$$

Используем далее теорию возмущений, полагая в правой части $C_{\vec{k}_1}(t) \approx C^{(0)}_{\vec{k}_1}(t) = \delta_{\vec{k}_1,\vec{k}}$,

т.е. считаем, что в начальном невозмущенном состоянии электрон находился в определенном состоянии $\vec{k}\,(!)$.

Т.е. $i\hbar \dfrac{\partial C_{\vec{k}'}(t)}{\partial t} \approx V_{\vec{k}',\vec{k}}(t) \cdot 1$, так что,

$$C_{\vec{k}'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} V_{\vec{k}',\vec{k}}(t')\,dt' = -\frac{i}{\hbar}\left\{ e\varphi_t(\vec{q},\omega)\cdot\delta_{\vec{k}',\vec{k}'-\vec{q}}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)t-i\omega t}}{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)-i\omega} + \right.$$

$$\left. + e\varphi^*_t(\vec{q},\omega)\cdot\delta_{\vec{k}',\vec{k}'+\vec{q}}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)t+i\omega t}}{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)+i\omega}\right\},$$

где мы предполагаем, что взаимодействие включается адиабатически, т.е. $\omega \to \omega + i\delta,\ \delta \to +0$.

В результате, в первом порядке теории возмущений:

$$\psi_{\vec k}\left(\vec r,t\right)\approx\psi^{(0)}_{\vec k}\left(\vec r,t\right)+\sum_{\vec k'\neq\vec k}C_{\vec k'}\left(t\right)\psi^{(0)}_{\vec k'}\left(\vec r,t\right)=$$

$$=\frac{e^{i\vec k\vec r-\frac{1}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k}t}}{\sqrt{\Omega}}+\frac{e\varphi_t\left(\vec q,\omega\right)}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}}\cdot e^{-i\omega t}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\left(-\varepsilon^{(0)}_{\vec k}+\cancel{\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}}\right)t}\cdot\frac{e^{i\left(\vec k+\vec q\right)\vec r-\cancel{\frac{1}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}t}}}{\sqrt{\Omega}}-$$

$$-\frac{e\varphi^*_t\left(\vec q,\omega\right)}{\hbar\omega-\varepsilon^{(0)}_{\vec k}+\varepsilon^{(0)}_{\vec k-\vec q}}\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\left(-\varepsilon^{(0)}_{\vec k}+\cancel{\varepsilon^{(0)}_{\vec k-\vec q}}\right)t}\cdot\frac{e^{i\left(\vec k-\vec q\right)\vec r-\cancel{\frac{1}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}t}}}{\sqrt{\Omega}}=$$

$$=\frac{e^{i\vec k\vec r-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^{(0)}_{\vec k}t}}{\sqrt{\Omega}}\left\{1+\left(\frac{e\varphi_t\left(\vec q,\omega\right)e^{i\vec q\vec r-i\omega t}}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}}-\frac{e\varphi^*_t\left(\vec q,\omega\right)e^{-i\vec q\vec r+i\omega t}}{\hbar\omega-\varepsilon^{(0)}_{\vec k}+\varepsilon^{(0)}_{\vec k-\vec q}}\right)\right\}$$

Отсюда результирующая полная электронная плотность:

$$\rho_t = \sum_k n_{\vec{k}} \left|\psi_k\left(\vec{r},t\right)\right|^2 = \sum_k n_{\vec{k}} \frac{1}{\Omega}\left|1+\left(\ldots\right)\right|^2 \approx$$

$$\approx \sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega}\left\{1+\left(\ldots\right)+\left(\ldots\right)^*\right\} = \sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega} +$$

$$+\sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega}\left\{e\varphi_t\left(\vec{q},\omega\right)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}\left[\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}-\frac{1}{\hbar\omega-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)}}\right]+\left(C.C\right)\right\}$$

Здесь $\sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega} = \frac{N_e}{\Omega} = n_e^{(0)}$ - исходная невозмущенная равновесная электронная плотность.

Все остальное - ρ_{ind}, так что прямо:

$$\rho_{ind}(\vec q,\omega)=\frac{e\varphi_t(\vec q,\omega)}{\Omega}\sum_{\vec k} n_{\vec k}\left(\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}}-\frac{1}{\hbar\omega-\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k-\vec q}}\right)$$

, или, если во втором члене заменить $\vec k\to\vec k+\vec q$:

$$\rho_{ind}(\vec q,\omega)=\frac{e\varphi_t(\vec q,\omega)}{\Omega}\sum_{\vec k}\frac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}}\qquad (!)$$

Так что: $\rho_{ind}(\vec q,\omega)=\rho_t(\vec q,\omega)\cdot\dfrac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\dfrac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}+i\delta}$.

Отсюда непосредственно находим:

$$\varepsilon(\vec q,\omega)=\frac{\rho_{ind}(\vec q,\omega)}{\rho_t(\vec q,\omega)}=\frac{(\rho_{ext}+\rho_{ind})-\rho_{ind}}{\rho_t}=1-\frac{\rho_{ind}}{\rho_t}=,$$

$$=1-\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\frac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}+i\delta}$$

или окончательно: $$\boxed{\varepsilon(\vec q,\omega)=1+\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\frac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon^{(0)}_{\vec k}-\varepsilon^{(0)}_{\vec k+\vec q}+i\delta}}$$

$\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)=\varepsilon^{(1)}\left(\vec{q},\omega\right)+i\varepsilon^{(2)}\left(\vec{q},\omega\right)$ (из-за наличия $i\delta$ в знаменателе (!)), где

$$\varepsilon^{(1)}\left(\vec{q},\omega\right)\equiv\operatorname{Re}\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)=1+\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\left[\sum_{k}\left(n_{\vec{k}+\vec{q}}-n_{\vec{k}}\right)P\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}\right],$$ а

$$\varepsilon^{(1)}\left(\vec{q},\omega\right)\equiv\operatorname{Im}\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)=-\pi\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}+\vec{q}}-n_{\vec{k}}\right)\delta\left(\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}\right),$$ т.е.

распространение волны возмущения $\sim e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}$ оказывается в определенном интервале ω и $\vec{q}$ - затухающим $\rightarrow$ для выполнения $\delta\left(\ldots\right)=0$ нужно: $\hbar\omega=\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}$, - возмущение переводит электрон из состояния $\left(\vec{k}\right)$ в состояние $\left(\vec{q}+\vec{k}\right)$ вблизи поверхности Ферми в полосе шириной 2ω, что и дает поглощение волны, с одной стороны, и возникновение конечного времени жизни у электрона, с другой стороны.

При этом замечательно, что $\rho_t=\dfrac{\rho_{ext}}{\varepsilon}$ $\rightarrow$ внешнее воздействие экранируется за счет перестройки системы, что и определяет коллективные свойства этой системы.

В частности, если $\omega \to \infty$, т.е. внешняя частота столь велика, что у электронов нет состояний, переход между которыми мог бы осуществляться при поглощении такого кванта $\hbar\omega$, то $\operatorname{Im}\varepsilon = 0$, и более того:

$$\operatorname{Re}\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right) \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{\Omega^2 q^2}\left\{ \overbrace{\frac{1}{\hbar\omega}\sum_{k}\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)}^{\equiv 0} + \frac{1}{\left(\hbar\omega\right)^2}\sum_{k}\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\right) + \dots \right\}$$

$$\varepsilon^{(1)}\left(\vec{q},\omega\right)\Big|_{0\to\omega} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$, где ω_p^2 - квадрат некоторой характерной частоты.

Получим эту частоту, полагая ω - большим, а $\left|\vec{q}\right|$ - малым(это автоматически даст $\operatorname{Im}\varepsilon \equiv 0!$).

Тогда $$\frac{\omega_p^2}{\left(\dfrac{4\pi e^2}{q^2\Omega}\right)} \cong \frac{1}{\cancel{\hbar^2}}\sum_{\sigma\vec{k}}\left(-\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial \varepsilon_{\vec{k}}}\right)\cancel{\hbar^2}\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)^2 = 2\frac{\Omega}{\left(2\pi\right)^3}\int d^3k\,\delta\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\varepsilon_F\right)\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)^2$$

Следовательно: $\omega_p^2 = \dfrac{4\pi e^2}{m}\left(\underbrace{2\cdot\dfrac{1}{(2\pi)^3}\cdot\dfrac{4\pi}{3}\cdot k_F^3}_{n_e(!)}\right) = \dfrac{4\pi n_e e^2}{m_e}(!)$ - так называемая плазменная частота электронов.

Можно найти и следующий по $\left(\omega^{-2}\right)$ член (легко проверить, что член $\sim \dfrac{1}{\omega^3}(\ldots) \equiv 0!$ -), именно: $= +\dfrac{1}{(\hbar\omega)^4}\sum_k \underbrace{\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)}_{\frac{\partial n_k}{\partial \varepsilon_k}\cdot\hbar\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)} \underbrace{\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\right)}_{\approx\left(\hbar\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)\right)^3} = -\dfrac{1}{\omega^4}\sum_k \delta\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_F\right) v_F^4\cdot q^4\cdot\cos^4\theta$,

так что будем иметь в интеграле по углам: $2\pi\int_{-1}^{1}\alpha x\cdot x^4 = 2\pi\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$, т.е.

$$-\frac{3}{5}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^4}\cdot\left(q\vec{v}_F\right)^2;$$

Окончательно: $\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)\Big|_{\substack{\omega\to\infty \\ \vec{q}\ll k_F}} \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\omega_p^2}{\omega^4}\cdot\left(q\vec{v}_F\right)^2 \to 1!$, т.е. столь быстроменяющиеся поля <u>не</u> экранируются.

Отметим далее, что если $\rho_{ext}=0$, то в этом случае: $\rho_t=\rho_{ind}$, или с учетом

$$\left(1-\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)\right)=\frac{\rho_{ind}}{\rho_t},$$

$$\rho_{ind}\cdot\varepsilon=0\rightarrow\begin{cases}1)\rho_{ind}=0-\textit{система не реагирует}\\ 2)\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)=0-\textit{незатухающие собственные частоты}\left(\mathrm{Im}=0\right)\end{cases};$$

$$1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^4}\left(\vec{q}\vec{v}_F\right)^2+\ldots=0,\ \text{или}\ \omega^2\cong\omega_p^2+\frac{3}{5}\left(\vec{q}\vec{v}_F\right)^2+\ldots.$$

Рассмотрим экранировку точечного заряда, статический случай $\omega=0$.

$$V_{ind}\left(\vec{q}\right)=\frac{4\pi e^2}{q^2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}$$

$$V_{ind}\left(\vec{r}\right)=\int d^3\vec{q}\,\frac{4\pi e^2}{q^2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

При больших $\vec{r}$ вклад в интеграл дают малые $\vec{q}$, тогда можно считать, что

$\varepsilon\left(\vec{q}\right) = 1 + \frac{\lambda_{TF}^2}{q^2}$, и $V_{ind}\left(\vec{r}\right) = \int d^3q \frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda_{TF}^2} e^{i\vec{q}\vec{r}} \sim \frac{e^2}{r} e^{-\lambda_{TF} r}$, т.е. экспоненциальный спад.

Но ! в $\varepsilon\left(\vec{q}\right)$ есть еще неаналитичность при $\vec{q} = 2k_F$

(точнее во второй производной $\varepsilon\left(\vec{q}\right)$).

Поэтому будет аномальный вклад в интеграл $\int d^3\vec{q} \frac{4\pi e^2}{q^2 \varepsilon\left(\vec{q}\right)} e^{i\vec{q}\vec{r}}$, дважды интегрируя по частям, получим $V\left(r \to \infty\right) \sim \frac{\cos\left(2k_F r + \eta\right)}{r^3}$ - осциллирующее и гораздо медленнее спадающее поведение. Это называется Фриделевские осцилляции.