Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

Разложение поля в ряд по бегущим плоским волнам

$k = \omega / c$ - волновое число $\qquad \vec{E} = -\dot{\vec{A}}, \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\rho} \vec{e}_{\vec{k}\rho} \left(a_{\vec{k}\rho} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^{*}_{\vec{k}\rho} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

$\vec{e}_{\vec{k}\rho}$ - единичный вектор поляризации $\qquad a_{\vec{k}\rho} \sim e^{-i\omega t}$

Переход к каноническим переменным

$$Q_{\vec{k}\rho} = \frac{\omega}{\sqrt{4\pi}}\left(a_{\vec{k}\rho} + a^{*}_{\vec{k}\rho}\right); \quad P_{\vec{k}\rho} = -\frac{i}{\sqrt{4\pi}}\left(a_{\vec{k}\rho} - a^{*}_{\vec{k}\rho}\right) = \dot{Q}_{\vec{k}\rho}$$

Обобщенная координата $\qquad$ **Обобщенный импульс**

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

Функция Гамильтона $H = \frac{1}{2}\sum_{\vec k\rho}\left(P_{\vec k\rho}^2 + \omega^2 Q_{\vec k\rho}^2\right)$

Каждый член суммы соответствует бегущей волне с заданными значениями волнового вектора и поляризации и имеет вид, аналогичный виду для одномерного гармонического осциллятора.
Поэтому полученное разложение поля в ряд называется разложением поля на осцилляторы

Правила коммутации канонических операторов:

$$\hat P_{\vec k\rho}\hat Q_{\vec k'\rho'} - \hat Q_{\vec k'\rho'}\hat P_{\vec k\rho} = -i\hbar, \quad \rho=\rho',\ \vec k = \vec k',$$

$$\hat P_{\vec k\rho}\hat Q_{\vec k'\rho'} - \hat Q_{\vec k'\rho'}\hat P_{\vec k\rho} = 0, \ \text{или}\ \rho\neq\rho',\ \vec k \neq \vec k'$$

Гамильтониан поля:

$$\hat H = \frac{1}{8\pi}\int\left(\vec E^2 + \vec H^2\right)d\vec r \qquad \hat H = \frac{1}{2}\sum_{\vec k\rho}\left(\hat P_{\vec k\rho}^2 + \omega^2 \hat Q_{\vec k\rho}^2\right)$$

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

Собственные значения гамильтониана соответствуют собственным значениям гамильтониана одномерного гармонического осциллятора и определяют уровни энергии поля:

$$E = \sum_{\vec{k}\rho} \hbar\omega \left(N_{\vec{k}\rho} + \frac{1}{2} \right)$$

$N_{\vec{k}\rho}$ **- целые числа, определяющие число осцилляторов поля с данным значением энергии**

Классическое выражение для импульса поля: $\vec{P} = \frac{1}{4\pi c} \int [\vec{E}\vec{H}] d\vec{r}$

Тогда: $\vec{P} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}\rho} (\hat{P}^2_{\vec{k}\rho} + \hat{Q}^2_{\vec{k}\rho}) \frac{\vec{k}}{\omega}; \; \vec{P} = \sum_{\vec{k}\rho} \hbar\vec{k} \left(N_{\vec{k}\rho} + \frac{1}{2} \right)$

Выражения для энергии и импульса определяют энергию и импульс частиц, движущихся со скоростью света и имеющих нулевую массу покоя. Тогда

$N_{\vec{k}\rho}$ **- число частиц – фотонов – имеющих заданные значения волнового числа и поляризации**

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

$$\hat{c}_{k\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega\hat{Q}_{k\rho} + i\hat{P}_{k\rho}\right) \qquad \hat{c}^{+}_{k\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega\hat{Q}_{k\rho} - i\hat{P}_{k\rho}\right)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\rho} \omega \left(\hat{c}_{\vec{k}\rho}\hat{c}^{+}_{\vec{k}\rho} + \hat{c}^{+}_{\vec{k}\rho}\hat{c}_{\vec{k}\rho}\right)$$

$$\hat{\vec{A}} = \sum_{k\rho}\left(\hat{c}_{k\rho}\vec{A}_{k\rho} + \hat{c}^{+}_{k\rho}\vec{A}^{*}_{k\rho}\right); \qquad \vec{A}_{k\rho} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\,\vec{e}_{k\rho}e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\hat{\vec{E}} = \sum_{k\rho}\left(\hat{c}_{k\rho}\vec{E}_{k\rho} + \hat{c}^{+}_{k\rho}\vec{E}^{*}_{k\rho}\right); \qquad \vec{E}_{k\rho} = i\omega\vec{A}_{k\rho}$$

$$\hat{\vec{H}} = \sum_{k\rho}\left(\hat{c}_{k\rho}\vec{H}_{k\rho} + \hat{c}^{+}_{k\rho}\vec{H}^{*}_{k\rho}\right); \qquad \vec{H}_{k\rho} = \left[\frac{\vec{k}}{\omega}, \vec{E}_{k\rho}\right]$$

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

$$< N_{\vec{k}\rho}+1\left|c^{+}_{\vec{k}\rho}\right|N_{\vec{k}\rho}> = < N_{\vec{k}\rho}\left|c_{\vec{k}\rho}\right|N_{\vec{k}\rho}+1> = \sqrt{(N_{\vec{k}\rho}+1)}$$

$c^{+}_{\vec{k}\rho}$ **соответствует появлению в поле нового фотона (испусканию или излучению фотона) и поэтому называется оператором рождения фотона**

$c^{+}_{\vec{k}\rho}$ **соответствует поглощению фотонаи поэтому называется оператором рождения фотона**

$$N_{\vec{k}\rho}=0:\ <1\left|c^{+}_{\vec{k}\rho}\right|0> = <0\left|c_{\vec{k}\rho}\right|1> = 1$$

Процесс излучения фотона может произойти даже при отсутствии фотонов в начальном состоянии поля

Процессы излучения и поглощения делятся на три категории – спонтанное и вынужденное излучение, вынужденное поглощение

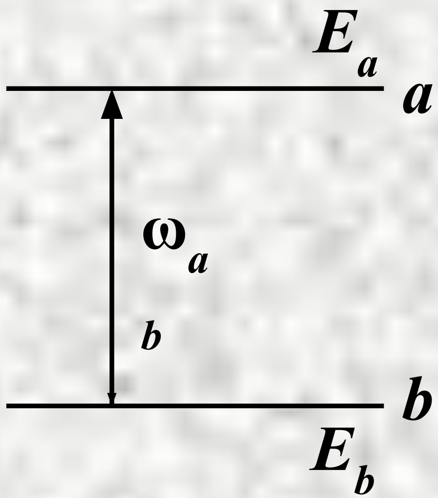
$$< N_{\vec{k}\rho}+1\left|c^{+}_{\vec{k}\rho}\right|N_{\vec{k}\rho}> = < N_{\vec{k}\rho}\left|c_{\vec{k}\rho}\right|N_{\vec{k}\rho}+1>$$

спонтанное излучение

вынужденное излучение

вынужденное поглощение

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна



Вероятность переходов между состояниями

$$dW_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{ab}\right|^2 \delta(E_a - E_b - \hbar\omega)\,d\nu$$

V_{ab} **- матричный элемент возмущения, приводящего к переходу из состояния *b* в состояние *a***

$$\nu \equiv \omega \Rightarrow E_a - E_b = \hbar\omega \Rightarrow W_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{ab}\right|^2$$

Гамильтониан атома, находящегося в электромагнитном поле:

$$\hat{H} = \frac{\left(\hat{\vec{p}}^{\,2} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)^2}{2m} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2\hat{\vec{A}}^2}{2mc^2} + \frac{-e}{2mc}\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{A}} + \hat{\vec{A}}\hat{\vec{p}}\right) = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

$$\hat{V} \equiv \hat{H}' = -\frac{e}{2mc}\left(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}\right)$$

Тогда: $$\hat{H}' = -\frac{e}{mc}\vec{p}\vec{e}_{\vec{k}\rho}\left(\hat{a}_{\vec{k}\rho}e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}^{*}_{\vec{k}\rho}e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right)$$

Отличные от нуля матричные элементы этого оператора:

$$< N_{\vec{k}\rho} + 1 \left| H' \right| N_{\vec{k}\rho} > = -\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar(N_{\vec{k}\rho} + 1)}{\omega^2}}\,\vec{e}_{\vec{k}\rho} < b \left| \vec{p}e^{i\vec{k}\vec{r}} \right| a >$$

$$< N_{\vec{k}\rho} - 1 \left| H' \right| N_{\vec{k}\rho} > = -\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar N_{\vec{k}\rho}}{\omega^2}}\,\vec{e}_{\vec{k}\rho} < a \left| \vec{p}e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right| b >$$

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

При переходе системы в состояние с большей энергией количество фотонов в поле уменьшается на единицу (вынужденное поглощение фотона)

При переходе системы в состояние с меньшей энергией происходит испускание фотона (спонатнное и вынужденное излучение)

$$dW_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|H_{aN_{k\rho},bN_{k\rho}+1}\right|^2 \delta(E_a - E_b - \hbar\omega)\, d\omega$$

Отношения вероятностей излучения и поглощения:

- для дифференциальных величин

$$\frac{dW_{ab}}{dW_{ba}} = \frac{dW_{\text{изл}}}{dW_{\text{погл}}} = \frac{N_{k\rho} + 1}{N_{k\rho}}$$

- для интегральных величин

$$\frac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{погл}}} = \frac{N_{k\rho} + 1}{N_{k\rho}}$$

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

Соотношение между интенсивностью поля, взаимодействующего с системой и количеством фотонов в этом поле

Число фотонов в единице объема $k_i = \frac{2\pi}{L} n_i$

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta\vec{k}; \quad dn = \frac{V}{(2\pi)^3} d\vec{k} = k^2 dk d\Omega$$

$I_{\vec{k}\rho} d\omega d\Omega$ **- энергия излучения поля, которое падает на единицу площади поверхности, имеет частоту в интервале** $d\omega$**, определенную поляризацию, и волновой вектор в телесном угле** $d\Omega$

В этом диапазоне количество осцилляторов равно: $\frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3}$

На каждый осциллятор приходится $N_{\vec{k}\rho}$ **фотонов**

Излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна

Тогда $$c\frac{k^2dkd\Omega}{(2\pi)^3}N_{\vec{k}\rho}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^3}N_{\vec{k}\rho}d\omega d\Omega; \quad N_{\vec{k}\rho} = \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3}I_{\vec{k}\rho}$$

После этого получаем: $$dW_{\vec{k}\rho}^{\text{погл}} = dW_{\vec{k}\rho}^{\text{инд}} = dW_{\vec{k}\rho}^{\text{сп}}\cdot\frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3}I_{\vec{k}\rho}$$

В случае, если поле не поляризовано и изотропно, полученное выражение можно проинтегрировать:

$$W^{\text{погл}} = W^{\text{инд}} = W^{\text{сп}}\cdot\frac{\pi^2c^2}{\hbar\omega^3}I, \quad I = 8\pi I_{\vec{k}\rho}$$

Коэффициенты Эйнштейна для спонтанного излучения, вынужденного излучения и вынужденного поглощения

$$A = W^{\text{сп}}; \quad B^{\text{изл}} = W^{\text{изл}}\frac{c}{I}; \quad B^{\text{погл}} = W^{\text{погл}}\frac{c}{I}$$