<u>Лекция 12. </u>Непрерывный спектр. Прохождение потенциальных барьеров

Рассмотрим теперь решения уравнения Шредингера,

отвечающие непрерывному спектру собственных значений.

Эти решения не затухают при $x \to \pm\infty$ и, следовательно,

не могут быть нормированы на единицу. Поэтому

постулат квантовой механики относительно вероятностной

интерпретации волновой функции таких состояний модифицируется:

отношение квадратов значений волновой функции в двух

точках определяет отношение вероятностей

$$|\Psi(x_1,t)|^2 / |\Psi(x_2,t)|^2 = dw(x_1,t) / dw(x_2,t) \, .$$

Лекция 12 (2 слайд)

Величина

$$J(x,t) = (\hbar / 2mi)\left(\Psi'(x,t)\Psi^*(x,t) - \Psi(x,t)\Psi'^*(x,t)\right)$$

определяет число частиц, прошедших в рассматриваемом состоянии за единицу времени через точку с координатой x в момент времени t. Знак величины J определяет направление движения частиц в потоке: знак «+» – в положительном направлении оси x, знак «-» - в отрицательном.

Лекция 12 (3 слайд)

В качестве примера рассмотрим несколько состояний

свободных частиц:

$$\Psi_1(x,t) = e^{i(kx-\varepsilon t)}$$

$$\Psi_2(x,t) = e^{i(-kx-\tilde{\varepsilon} t)}$$

$$\Psi_3(x,t) = \cos kx\, e^{-i\tilde{\varepsilon} t}$$

$$\Psi_4(x,t) = \left(\frac{1}{2}e^{ikx} + \frac{1}{3}e^{-ikx}\right)e^{-i\tilde{\varepsilon} t}$$

$(k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar > 0,\ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\hbar)$

Лекция 12 (4 слайд)

Первая и вторая волновые функции являются

собственными функциями оператора импульса,

отвечающими собственным значениям $p_1 = \hbar k = \sqrt{2m\varepsilon}$

и $p_2 = -\hbar k = -p_1$.

При этом первая волновая функция

стиц с

описывает стационарный поток свободных ча

определенной энергией, движущихся в положительном

x, в отрицательном.

направлении оси вторая -

Вычисляя поток для первой и второй функции, найдем, что

$$J_{1,2}(x,t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi'_{1,2}\,\Psi_{1,2}{}^{*} - \Psi'_{1,2}{}^{*}\,\Psi_{1,2}\right) = \pm\frac{\hbar k}{m}$$

через каждую точку в единицу времени проходят $\hbar k / m$

частиц.

Лекция 12 (5 слайд)

Третья и четвертая волновые функции не являются собственными функциями оператора импульса, а представляют собой суперпозицию состояний с импульсами $p_1 = \hbar k = \sqrt{2m\varepsilon}$ $p_2 = -\hbar k = -p_1$.

и

Для волновой функции Ψ_3

потоки источников,

находящихся на $-\infty$ ∞,

и соответственно равны

$\hbar k / 4m$ $-\hbar k / 4m$. Ψ_4

и Для состояния потоки этих

источников равны $\hbar k / 9m$ $-\hbar k / 4m$.

и

Лекция 12 (6 слайд)

Знание плотности потока частиц позволяет находить коэффициенты отражения и прохождения частиц через потенциальные барьеры. ассмотрим такой барьера, что:

Р

$$U(x) \to \pm\infty$$

асимптотики у.

$$x \to \pm\infty$$

Из

Ш. при

$$\Psi'' + k^2\Psi = 0$$

асимптотику решений при $x \to +\infty$:

находим

$$\Psi = Ce^{ikx} + De^{-ikx}$$

Лекция 12 (7 слайд)

это решение представляет собой суперпозицию волн,
оложительном и отрицательном
распространяющихся в п
направлении оси x
соответственно. Если рассматривать
из $-\infty$, $x \to +\infty$
падение частиц на барьер то при
влении
частиц, распространяющихся в отрицательном напра
x , Поэтому при такой постановке (частицы
оси не будет.

падают на барьер слева) второе слагаемое нужно отбросить.
$D = 0$.

Поэтому берем

Лекция 12 (8 слайд)

при $x \to -\infty$:

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

первое слагаемое в этом решении - это падающая на барьер волна, бегущая направо; второе слагаемое – это отраженная волна, бегущая налево

Лекция 12 (9 слайд)

Все три коэффициента A, B, C однозначно связаны (так как всего произвольных постоянных в решении уравнения второго порядка должно быть две, а одна постоянная уже фиксирована условием $D = 0$); два других выражают через него.

Плотность потока частиц в рассматриваемом состоянии:

$$J \equiv J_x = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$$

Лекция 12 (10 слайд)

Введём величины, которые характеризуют процесс прохождения барьеров и которые называются коэффициентами прохождения и отражения.

Коэффициент прохождения D:

$$D = \left| \frac{J_{\text{прош.}}}{J_{\text{пад.}}} \right| = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

Коэффициент отражения R:

$$R = \left| \frac{J_{\text{отр.}}}{J_{\text{пад.}}} \right| = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$