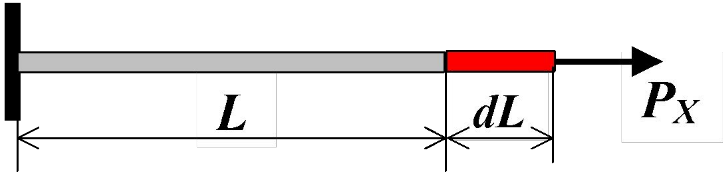
Лекция 11. Энергетические методы определения перемещений

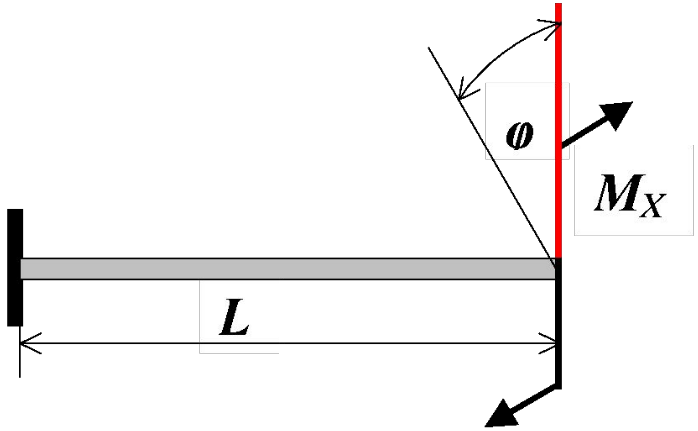
Работа внешних сил

<u>Растяжение-сжатие</u>



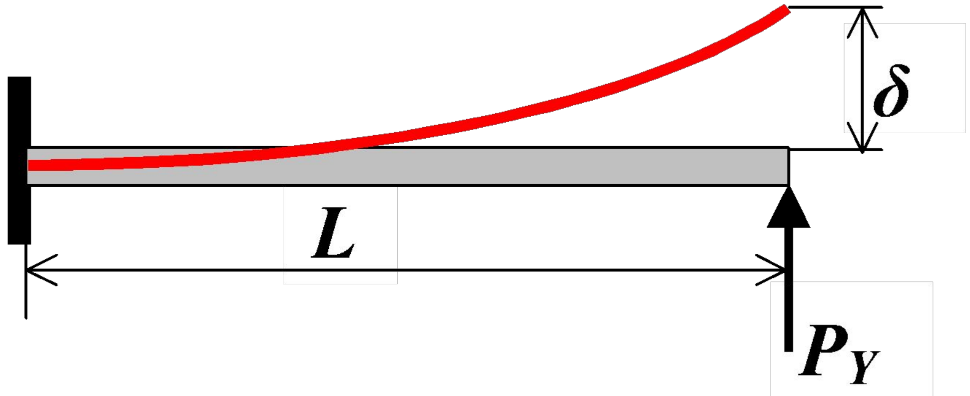
$$A_{P_X} = \frac{1}{2} P_X \Delta L$$

<u>Кручение</u>

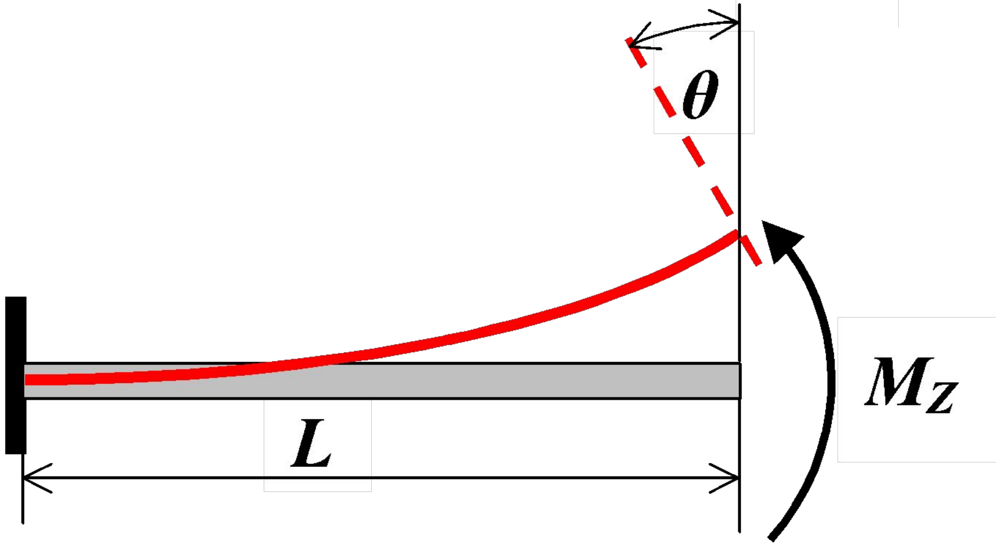


$$A_{M_X} = \frac{1}{2} M_X \varphi$$

Работа внешних сил при изгибе



$$A_{P_Y} = \frac{1}{2} P_Y \delta$$



$$A_{M_Z} = \frac{1}{2} M_X \theta$$

Обобщенная работа внешних сил

Формулы можно обобщить

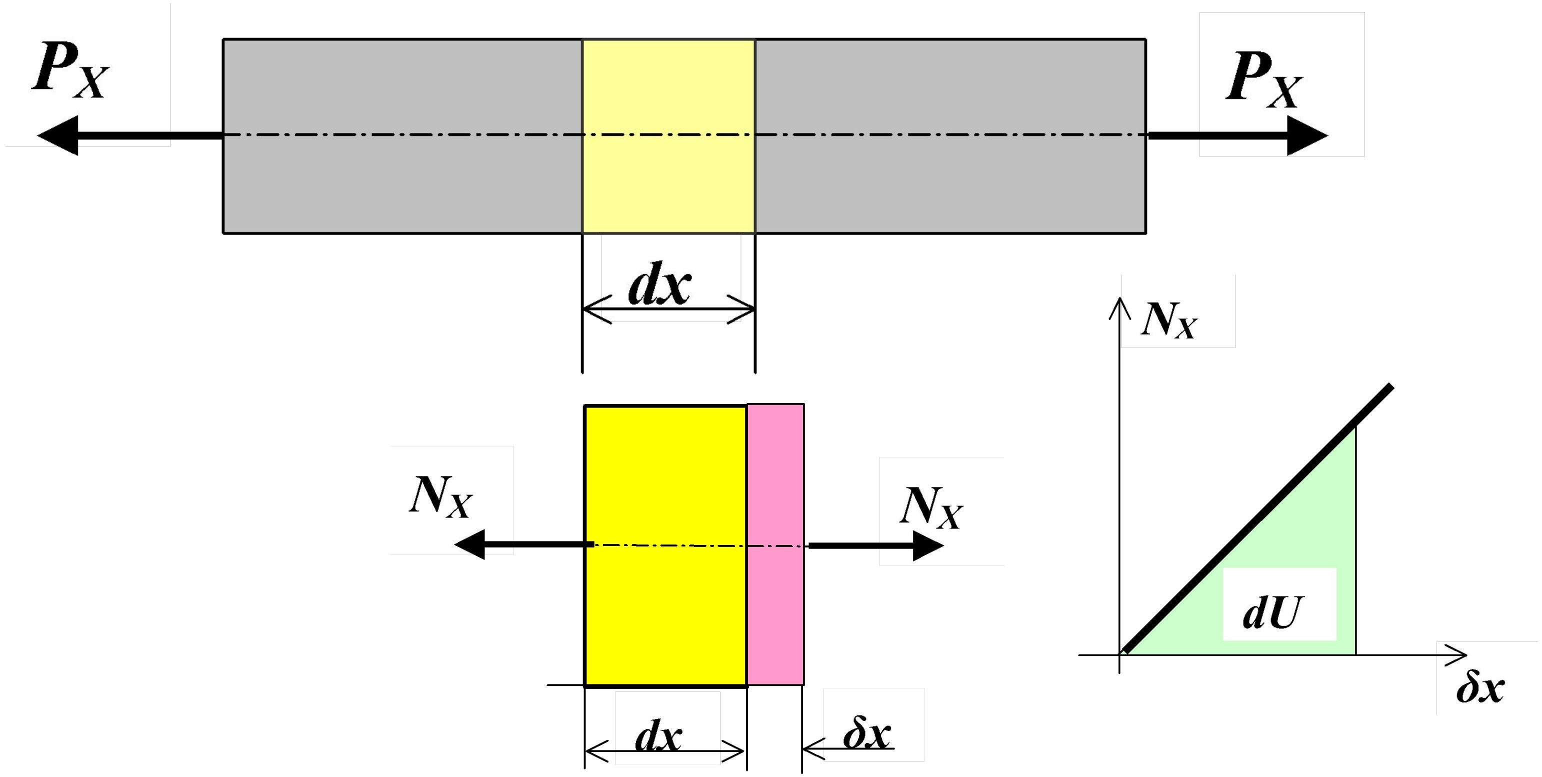
$$A_{P_{OБ}} = \frac{1}{2} P_{OБ} \delta_{OБ}$$

где $P_{OБ}$ – обобщенная сила, т.е. любое силовое воздействие, любой силовой фактор;

$\delta_{OБ}$ - обобщенное перемещение, т.е. тот вид перемещения, на котором $P_{OБ}$ совершает работу.

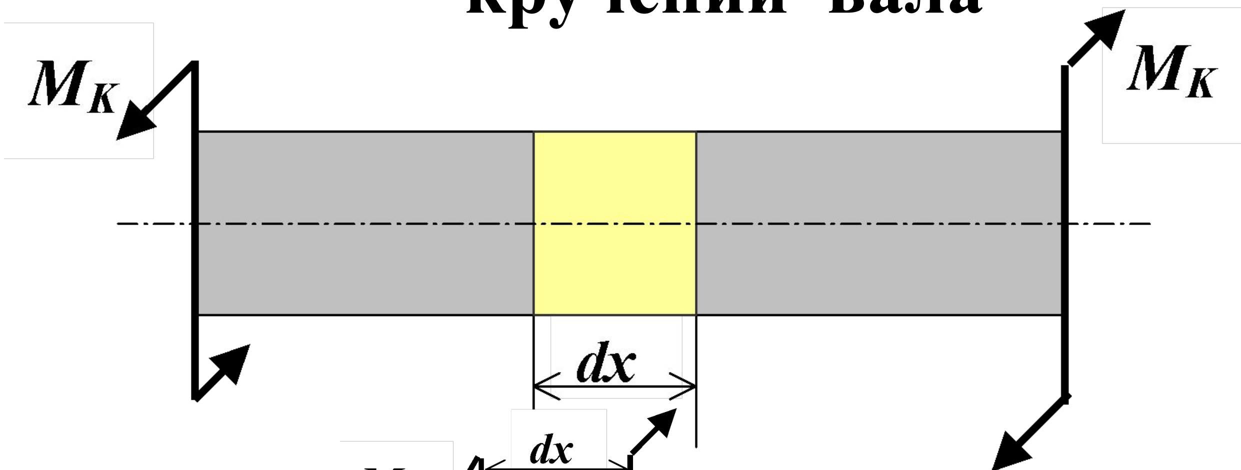
Каждый из шести известных силовых факторов совершает работу на своем перемещении

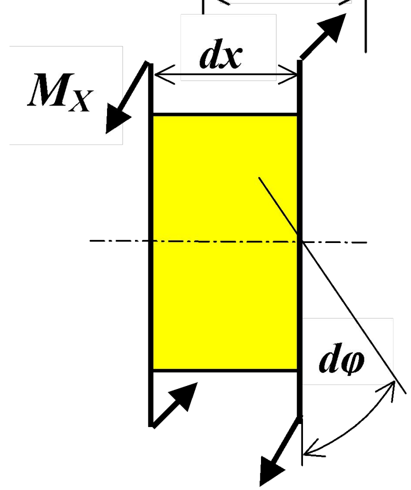
Потенциальная энергия деформации при растяжении стержня

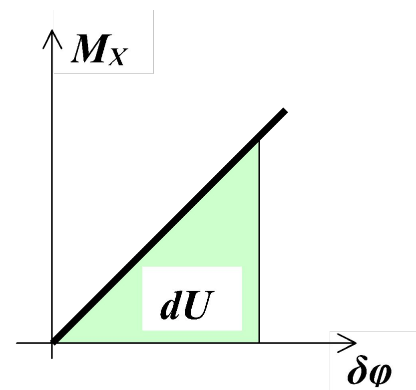


$$dU = \frac{1}{2} N_X \delta x \qquad \delta x = \frac{N_X dx}{EF} \qquad U_{N_X} = \int_L \frac{N_X^2(x) dx}{2EF}$$

Потенциальная энергия деформации при кручении вала

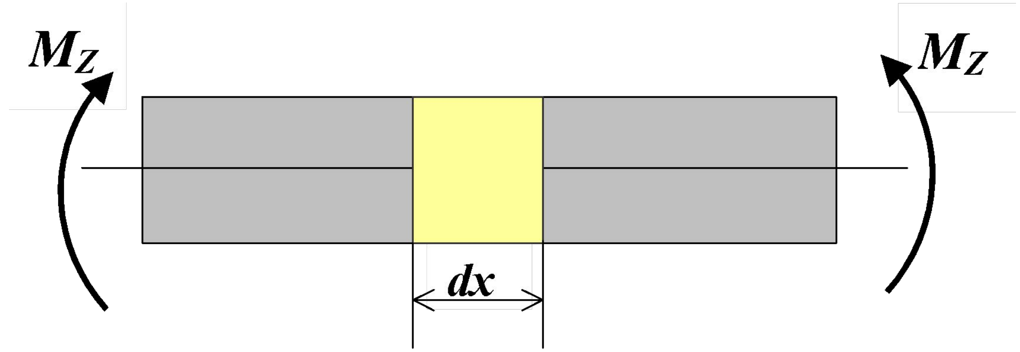


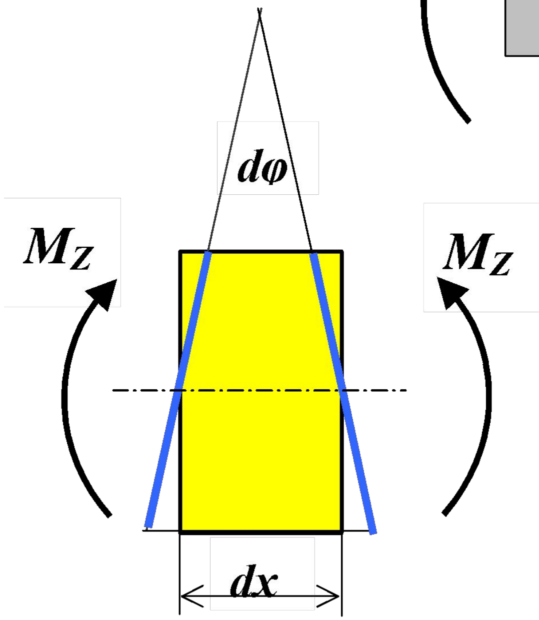




$$dU = \frac{1}{2} M_X \delta\varphi \qquad \delta\varphi = \frac{M_X dx}{GI_p} \qquad U_{M_X} = \int\limits_L \frac{M_X^2(x)dx}{2GI_p}$$

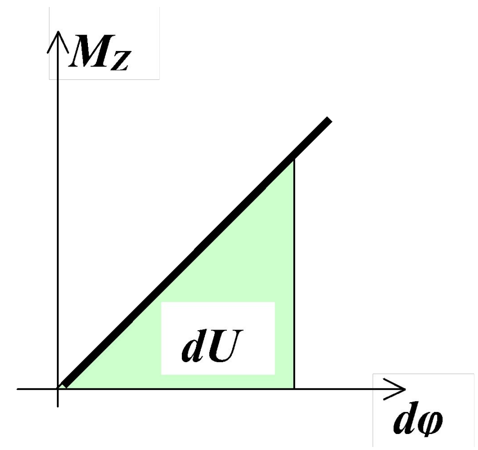
Потенциальная энергия деформации при чистом изгибе балки





$$dU = \frac{1}{2} M_Z \delta\varphi$$

$$\delta\varphi = \frac{M_Z dx}{EI_Z}$$



$$U_{M_Z} = \int_L \frac{M_Z^2(x)dx}{2EI_Z} \qquad U_{M_Y} = \int_L \frac{M_Y^2(x)dx}{2EI_Y}$$

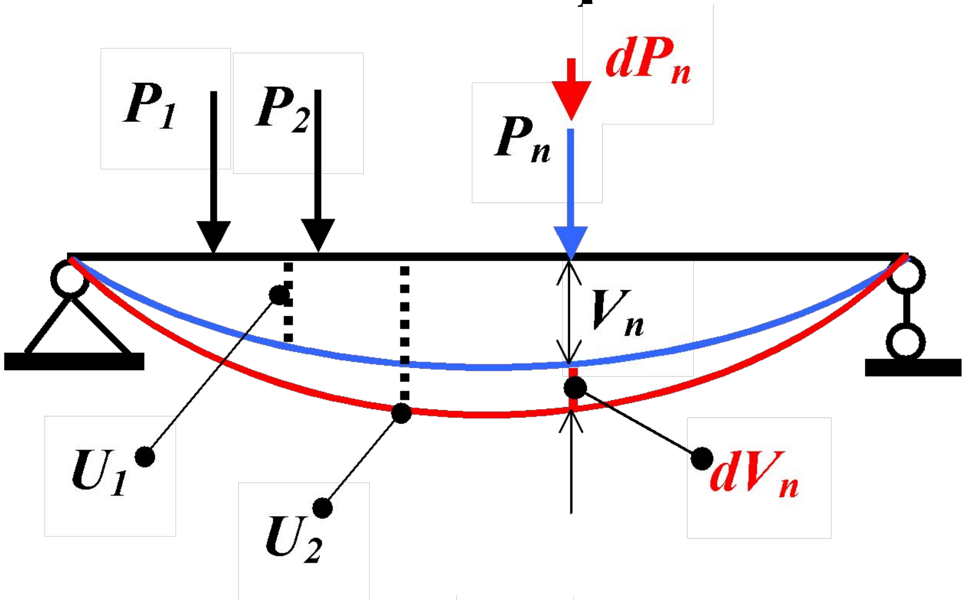
Потенциальная энергия бруса при сложном нагружении

Каждому силовому фактору соответствуют перемещения, на которых остальные силовые факторы не совершают работу. Поэтому потенциальная энергия деформации при сложном нагружении равна сумме потенциальных энергий шести отдельных факторов. Пренебрегая энергией деформации, связанной с поперечными силами, получаем для полной энергии деформации

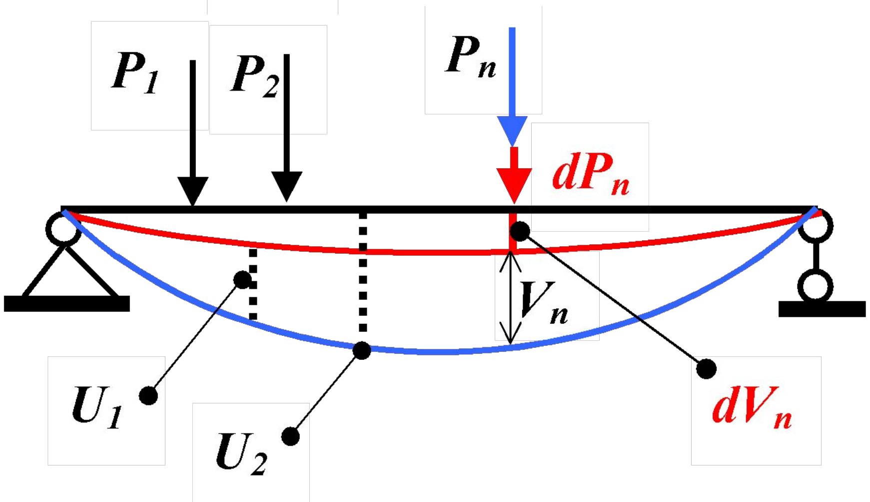
$$U = U_{N_X} + U_{M_X} + U_{M_Y} + U_{M_Z},$$

$$U = \int_L \frac{N_X^2(x)dx}{2EF} + \int_L \frac{M_X^2(x)dx}{2GI_p} + \int_L \frac{M_Y^2(x)dx}{2EI_Y} + \int_L \frac{M_Z^2(x)dx}{2EI_Z}.$$

Теорема Кастилиано



$$U_2 = U_1 + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$$



$$U_2 = \frac{1}{2} dP_n dV_n + U_1 + dP_n V_n$$

Теорема Кастилиано (продолжение)

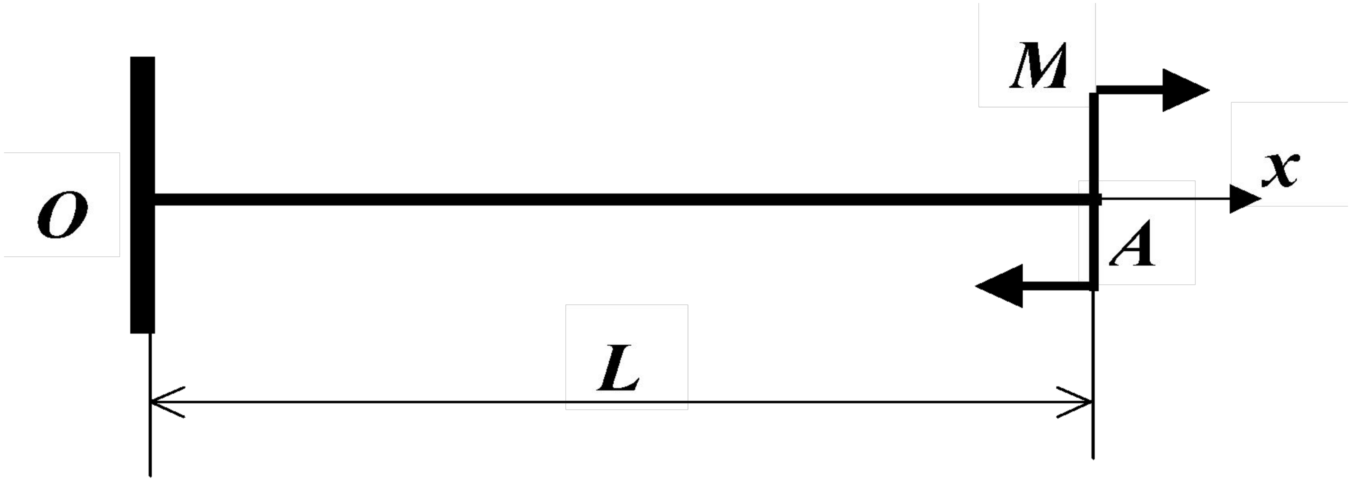
$$U_1 + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n = \frac{1}{2} dP_n dV_n + U_1 + dP_n V_n.$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $\frac{1}{2} dP_n dV_n$, получаем аналитическую формулировку теоремы Кастилиано

$$V_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \qquad \text{или} \qquad V_{ОБ} = \frac{\partial U}{\partial P_{ОБ}}$$

<u>Частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы вдоль направления действия этой силы.</u>

Пример применения теоремы Кастилиано



Требуется найти угол поворота сечения θ_A и прогиб конца балки δ_A .

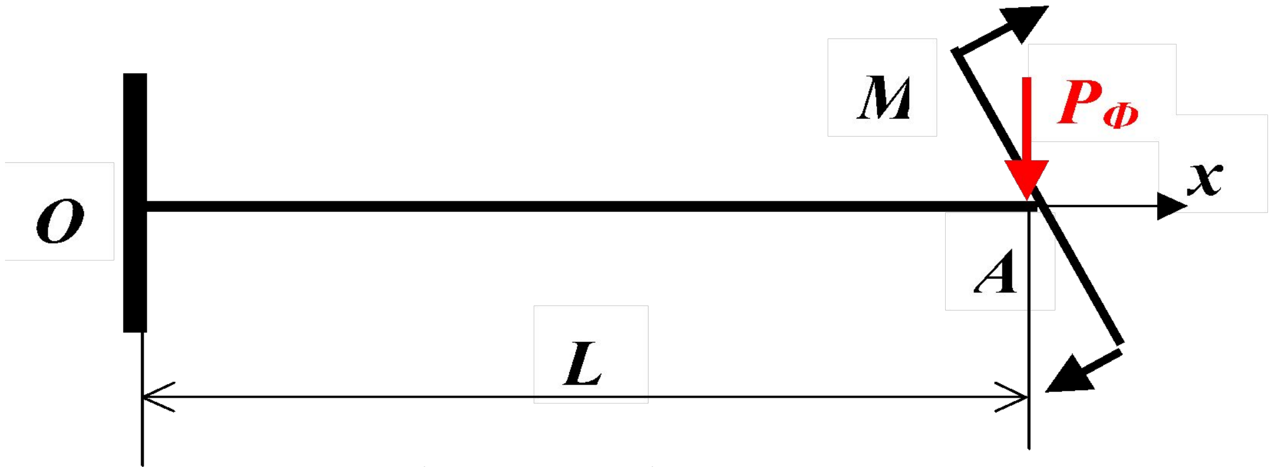
$M_Z(x) = M = const$

$$U = \int_L \frac{M_Z^2(x)dx}{2EI_Z} = \frac{1}{2}\frac{M^2 L}{EI_Z}$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{ML}{EI_Z}$$

Но как найти прогиб конца балки δ_A ?

Пример применения теоремы Кастилиано (метод фиктивной силы)



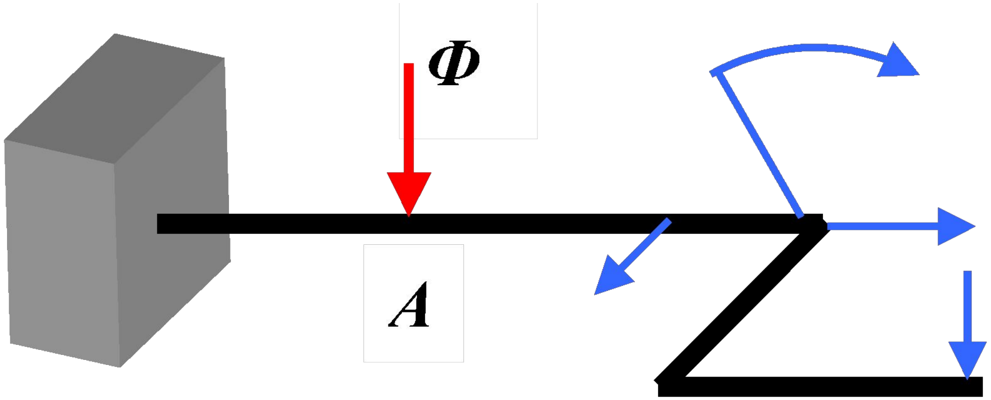
$$M_Z = -(M + P_Ф x)$$

$$U = \int_L \frac{(M + P_Ф x)^2 dx}{2EI_Z} = \frac{1}{2}\frac{M^2 L}{EI_Z} + \frac{MP_Ф L^2}{2EI_Z} + \frac{P_Ф^2 L^3}{6EI_Z}$$

$$\delta_A = \left(\frac{\partial U}{\partial P_Ф}\right)_{P_Ф = 0} = \frac{ML^2}{2EI_Z}$$

Отмерим, что можно дифференцировать и под знаком интеграла.

Интеграл Мора



$$N_X^{\Sigma} = N_X + N_X^{\Phi};$$
$$M_X^{\Sigma} = M_X + M_X^{\Phi};$$
$$M_Y^{\Sigma} = M_Y + M_Y^{\Phi};$$
$$M_Z^{\Sigma} = M_Z + M_Z^{\Phi};$$

$$N_X^{\Phi} = N_{X1}\Phi;$$
$$M_X^{\Phi} = M_{X1}\Phi;$$
$$M_Y^{\Phi} = M_{Y1}\Phi;$$
$$M_Z^{\Phi} = M_{Z1}\Phi,$$

где $\boldsymbol{N_{X1}}$, $\boldsymbol{M_{X1}}$, $\boldsymbol{M_{Y1}}$ и $\boldsymbol{M_{Z1}}$ **-** внутренние силовые факторы от безразмерной единичной силы $\boldsymbol{\Phi = 1}$**.**

Интеграл Мора (продолжение)

$$U = \int_L \frac{\left(N_X + N_{1X}\Phi\right)^2 dx}{2EF} + \int_L \frac{\left(M_X + M_{X1}\Phi\right)^2 dx}{2GI_p} + \ldots$$

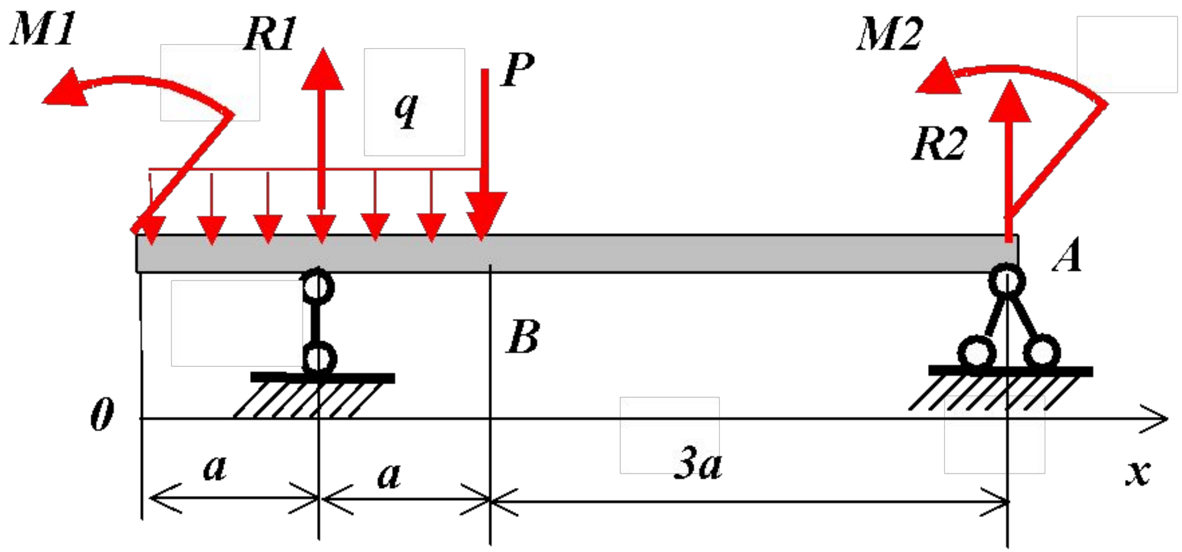
$$+ \int_L \frac{\left(M_Y + M_{1Y}\Phi\right)^2 dx}{2EI_Y} + \int_L \frac{\left(M_Z + M_{Z1}\Phi\right)^2 dx}{2EI_Z}$$

$$\delta_A = \left(\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right)_{\Phi=0} = \int_L \frac{N_X N_{1X} dx}{2EF} + \int_L \frac{M_X M_{1X} dx}{2GI_p} + \ldots$$

$$+ \int_L \frac{M_Y M_{1Y} dx}{2EI_Y} + \int_L \frac{M_Z M_{1Z} dx}{2EI_Z}$$

Применение интеграла Мора

Задача. Найти угол поворота сечения в точке А и прогиб в точке В



$a := 1 \cdot m$	$E := 2 \cdot 10^5 \cdot MPa$
$P := 100 \cdot kN$	$q := 100 \cdot kN \cdot m^{-1}$
$M1 := 100 \cdot kN \cdot m$	$M2 := 2 \cdot M1$

Применение интеграла Мора (продолжение 1)

Найдем опорные реакции

Given

$$R1 + R2 - P - q \cdot 2 \cdot a = 0$$

$$M1 + q \cdot 2 \cdot a \cdot 4 \cdot a - R1 \cdot 4 \cdot a + P \cdot 3 \cdot a + M2 = 0$$

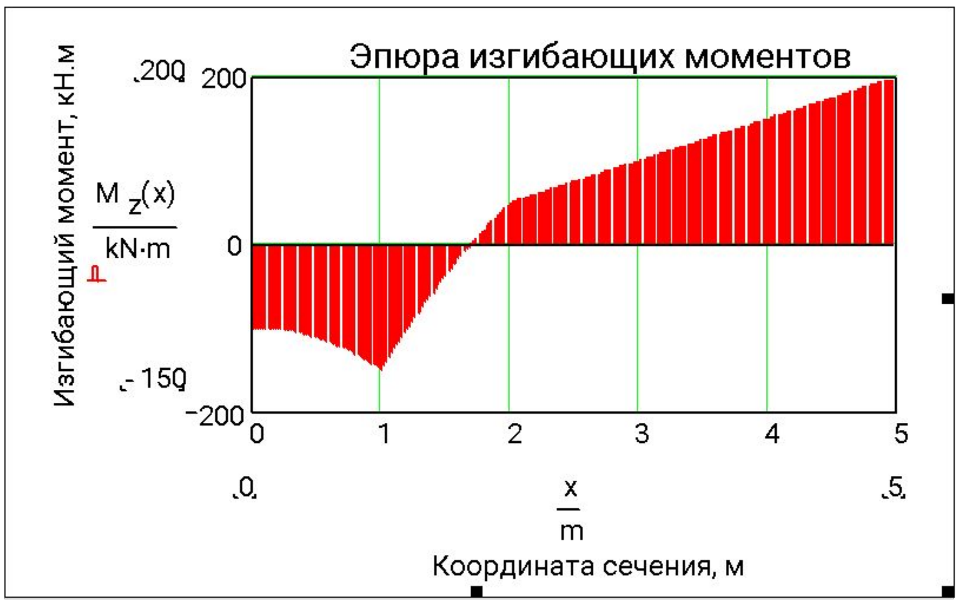
$$\begin{bmatrix} R1 \\ R2 \end{bmatrix} := \text{Find}(R1, R2)$$

$$R1 = 350 \cdot kN \qquad R2 = -50 \cdot kN$$

Применение интеграла Мора (продолжение 2)

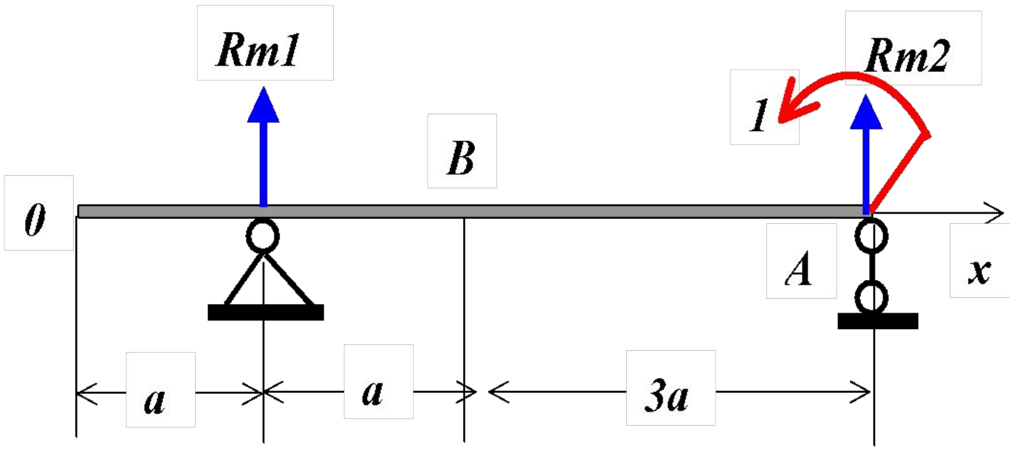
Запишем функцию изгибающих моментов от внешних сил

$$
M_z(x) := \begin{cases} -M1 - q\cdot\dfrac{x^2}{2} & \text{if } 0 \le x < a \\[2ex] -M1 - q\cdot\dfrac{x^2}{2} + R1\cdot(x-a) & \text{if } a \le x < 2\cdot a \\[2ex] -M1 - q\cdot 2\cdot a\cdot(x-a) + R1\cdot(x-a) - P\cdot(x-2\cdot a) & \text{if } 2\cdot a \le x \le 5\cdot a \end{cases}
$$



Применение интеграла Мора (продолжение 3)

Найдем угол поворота сечения в точке A, приложив в этой точке единичный изгибающий момент



Определим опорные реакции

Given

$$Rm1 + Rm2 = 0$$

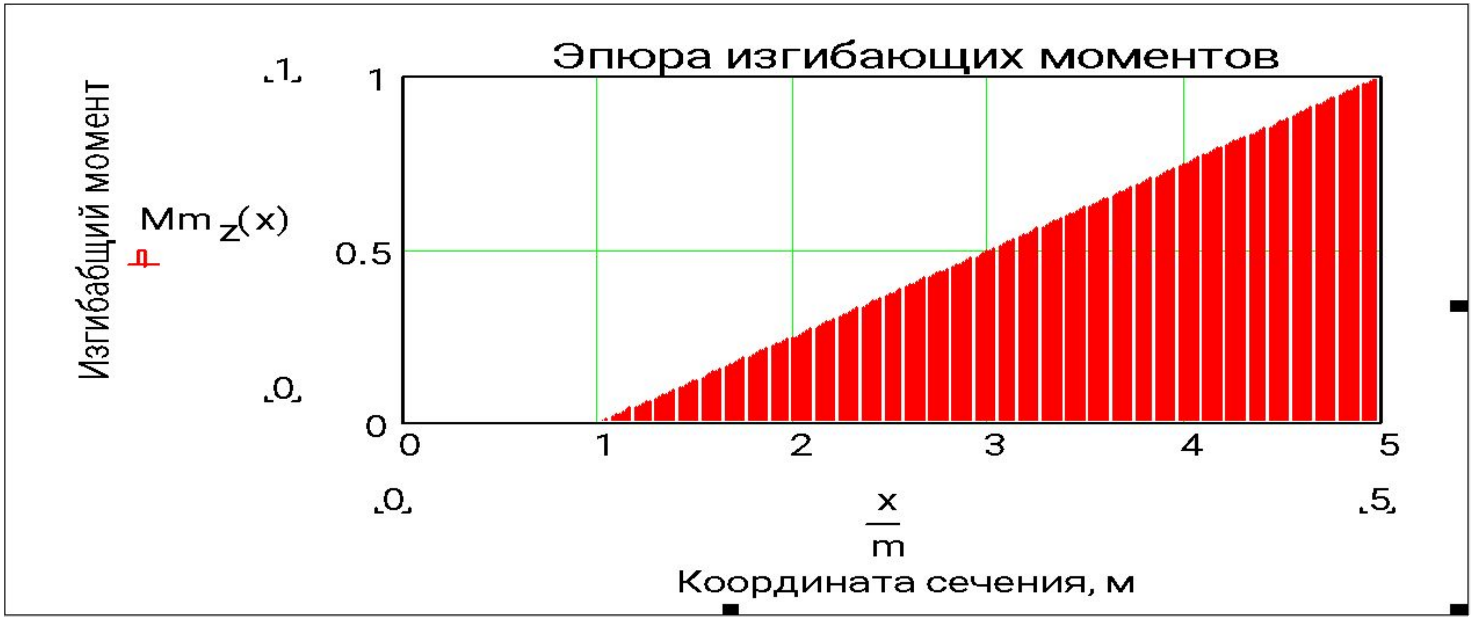
$$Rm1 \cdot 4 \cdot a - 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Rm1 \\ Rm2 \end{bmatrix} := Find(Rm1, Rm2)$$

$$Rm1 = 0.25 \frac{1}{m} \qquad Rm2 = -0.25 \frac{1}{m}$$

Применение интеграла Мора (продолжение 4)

Запишем функцию изгибающих моментов и построим соответствующую эпюру

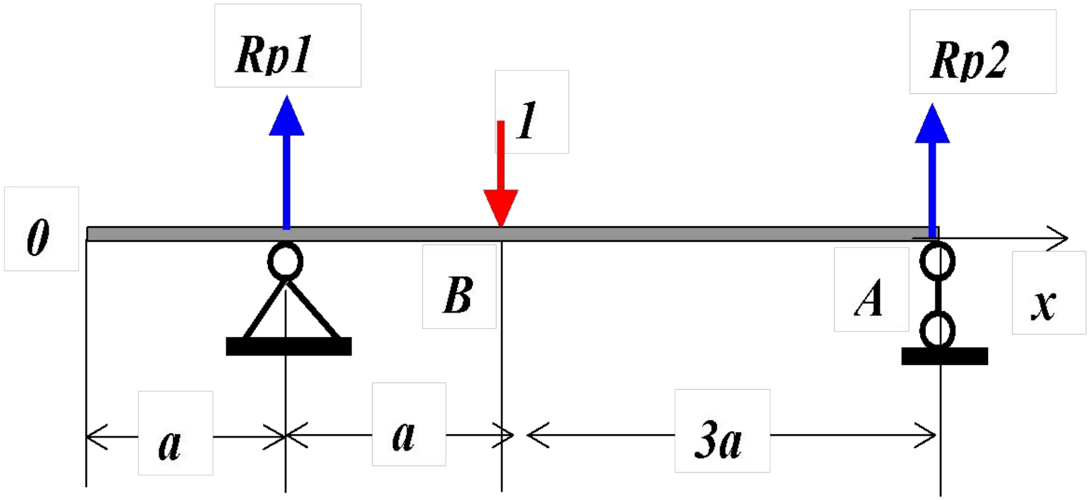


Угол поворота сечения в точке А равен

$$\theta_A := \int_0^{5\cdot a} \frac{M_z(x)\cdot Mm_z(x)}{E\cdot I_z}\,dx \qquad \theta_A = 0.273\cdot deg$$

Применение интеграла Мора (продолжение 5)

Найдем прогиб в точке B, приложив в этой точке единичную силу



Определим опорные реакции

Given

$$Rp1 + Rp2 - 1 = 0$$

$$Rp1 \cdot 4 \cdot a - 1 \cdot 3 \cdot a = 0$$

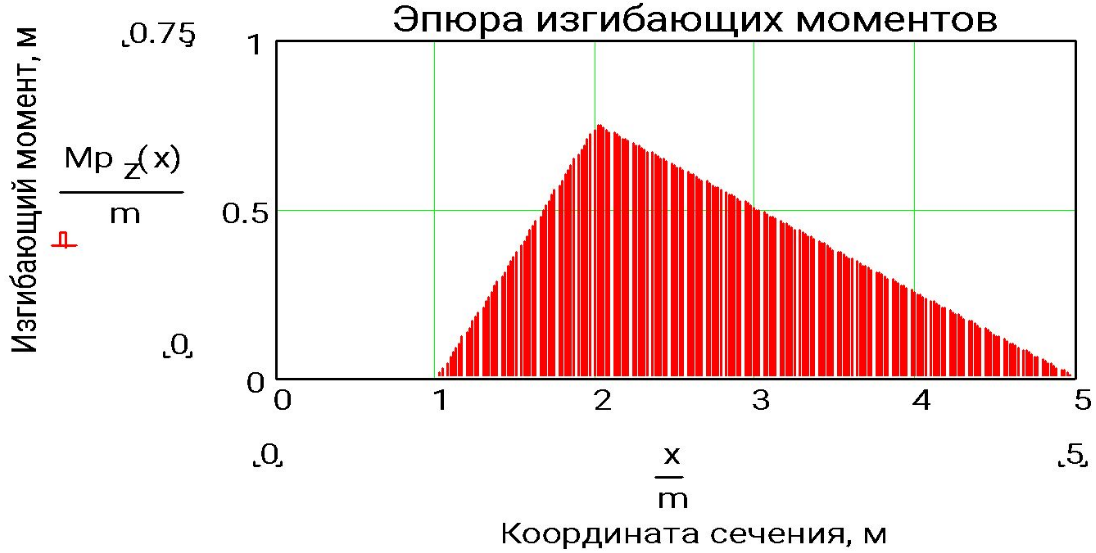
$$\begin{bmatrix} Rp1 \\ Rp2 \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(Rp1, Rp2)$$

$Rp1 = 0.75$ $\qquad$ $Rp2 = 0.25$

Применение интеграла Мора (продолжение 6)

Запишем функцию изгибающих моментов и построим соответствующую эпюру

$$Mp_z(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < a \\ Rp1\cdot(x-a) & \text{if } a \le x < 2\cdot a \\ Rp1\cdot(x-a) - 1\cdot(x-2\cdot a) & \text{if } 2\cdot a \le x \le 5\cdot a \end{cases}$$



Прогиб в точке В равен

$$\delta_B := \int_0^{5\cdot a} \frac{M_z(x)\cdot Mp_z(x)}{E\cdot I_z}\,dx \qquad \delta_B = 1.992\cdot mm$$