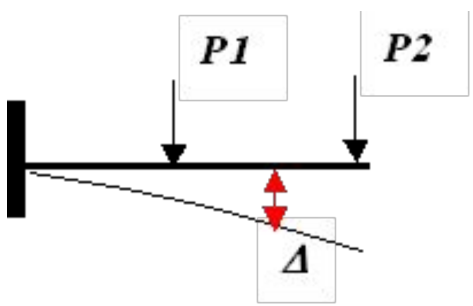
Лекция 2. Деформации

- **Деформацию** тела под действием внешних сил связывают с изменением формы и размеров тела.
- Если устранение причины деформации (разгрузка) приводит к исчезновению деформации, то деформацию называют **упругой или обратимой.**
- Если устранение причины деформации не приводит к полному исчезновению деформации, то оставшуюся часть деформации называют **необратимой или пластической**.
- Различают **абсолютную** деформацию и **относительную**

деформацию

Абсолютная деформация

- **Абсолютная деформация** характеризует интегральную реакцию тела на внешнее воздействие. Примеры абсолютной деформации – прогиб балки, удлинение стержня, угол закручивания вала.
- Мерой абсолютной деформации является перемещение одной или нескольких точек тела из начального положения в конечное.

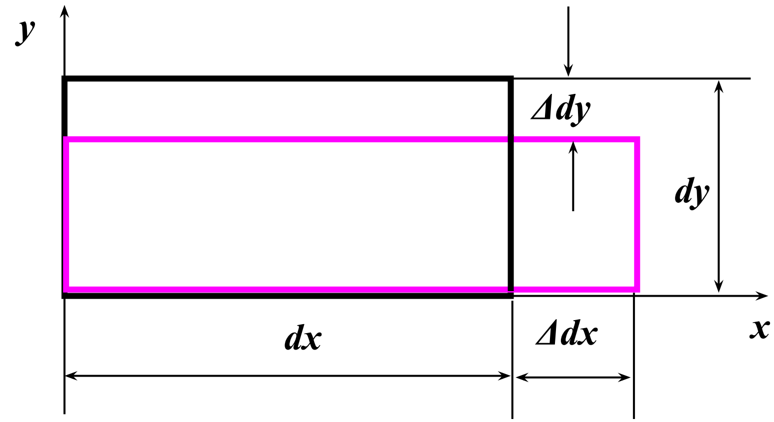


Относительная деформация

- Чтобы получить характеристику интенсивности изменения формы и размеров тела вводят понятие **относительной** деформации.
- **Относительная деформация** характеризует реакцию рассматриваемой **точки** (области) тела на внешнее воздействие.
- Различают **линейную** и **угловую** относительную деформацию
- Под **точкой тела** в сопротивлении материалов понимают объем некоторого элементарного параллелепипед.

Относительная линейная деформация

Под действием сил произойдет изменение размеров граней параллелепипеда



Относительная линейная деформация ε_x – это отношение удлинения Δdx отрезка к его начальной длине dx.

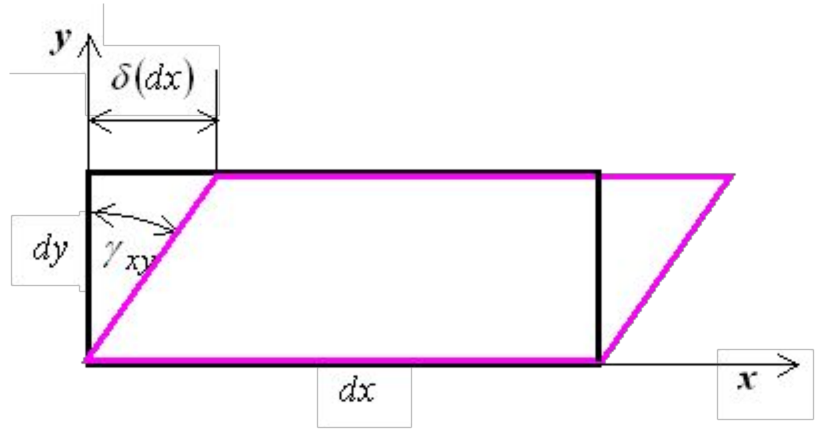
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Аналогично

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Относительная угловая деформация

Предположим, что элемент изменил также форму – прямоугольный параллелепипед стал косоугольным.



Определим угловую деформацию γ_{xy} как меру изменения прямого угла, в данном случае угла между осями ***x*** и ***y*** :

$$\gamma_{xy} = a\,tan\left(\frac{\delta(dx)}{dy}\right) \approx \frac{\delta(dx)}{dy}$$

Аналогично

$$\gamma_{yz} = \frac{\delta(dy)}{dz} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\delta(dz)}{dx}$$

Закон Гука. Модули упругости

Закон Гука отражает экспериментально установленную линейную зависимость между относительными деформациями и напряжениями.

Для нормальных напряжений

$$\sigma_x = E\varepsilon_x ,$$

где E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Для касательных напряжений

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} ,$$

где G – модуль упругости второго рода (модуль сдвига).

Коэффициент Пуассона

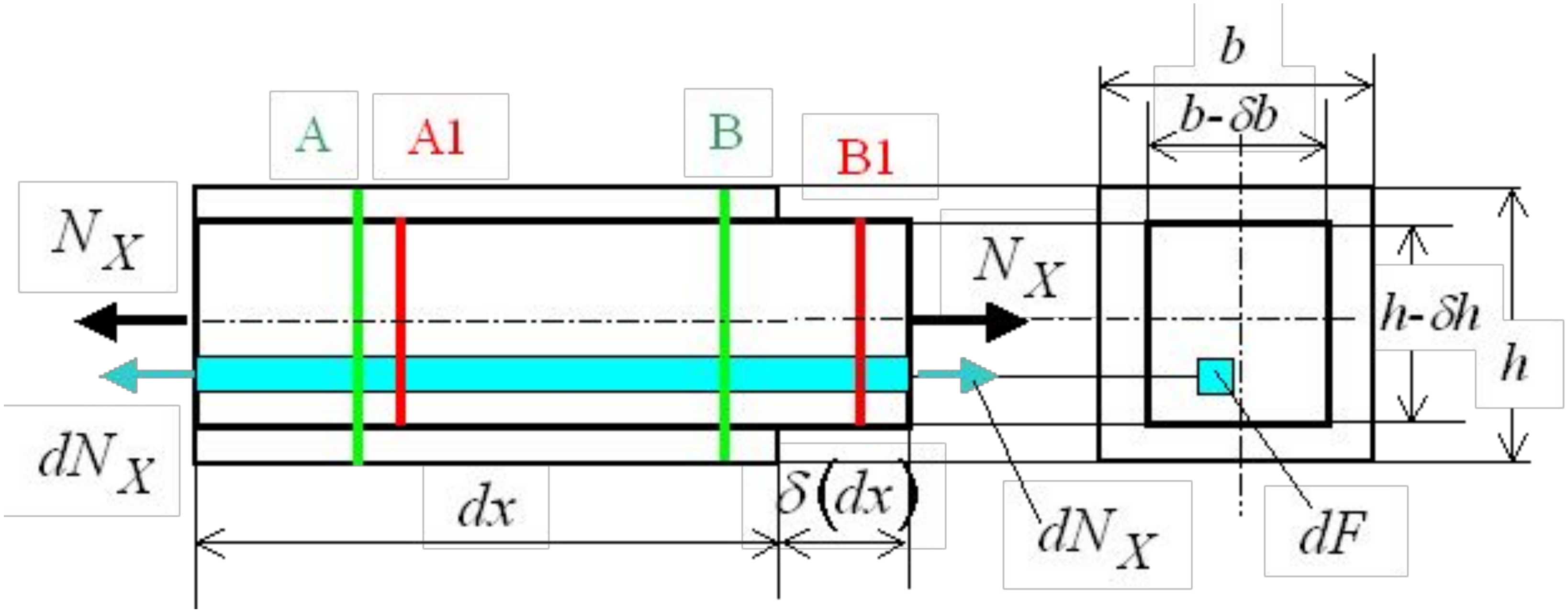
Коэффициент Пуассона μ ***устанавливает связь между продольными*** ε_x ***и поперечными (***ε_y ***и*** ε_y***) относительными деформациями.***

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right| = \left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right|$$

Растяжение – сжатие прямого стержня

Растяжение (сжатие) – деформация стержня под действием сил, направление действия которых совпадает с осью стержня, проходящей по центрам тяжести всех нормальных сечений стержня.

Напряжения при растяжении



$$dN_X = \sigma_X dF \qquad N_X = \int_F \sigma_X dF = \sigma_X F$$

$$\sigma_X = \frac{N_X}{F} \qquad \sigma_X(x) = \frac{N_X(x)}{F(x)}$$

Деформации и перемещения при растяжении

$$\varepsilon_X = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma_X}{E} = \frac{N_X}{EF} \qquad \delta(dx) = \varepsilon_X dx = \frac{N_X dx}{EF}$$

$$\Delta_N(x) = \int_0^x \varepsilon_X dx = \int_0^x \frac{N_X dx}{EF} \qquad \Delta_N(x) = \int_0^x \varepsilon_X(x) dx = \int_0^x \frac{N_X(x) dx}{E(x) F(x)}$$

Температурное удлинение стержня равно

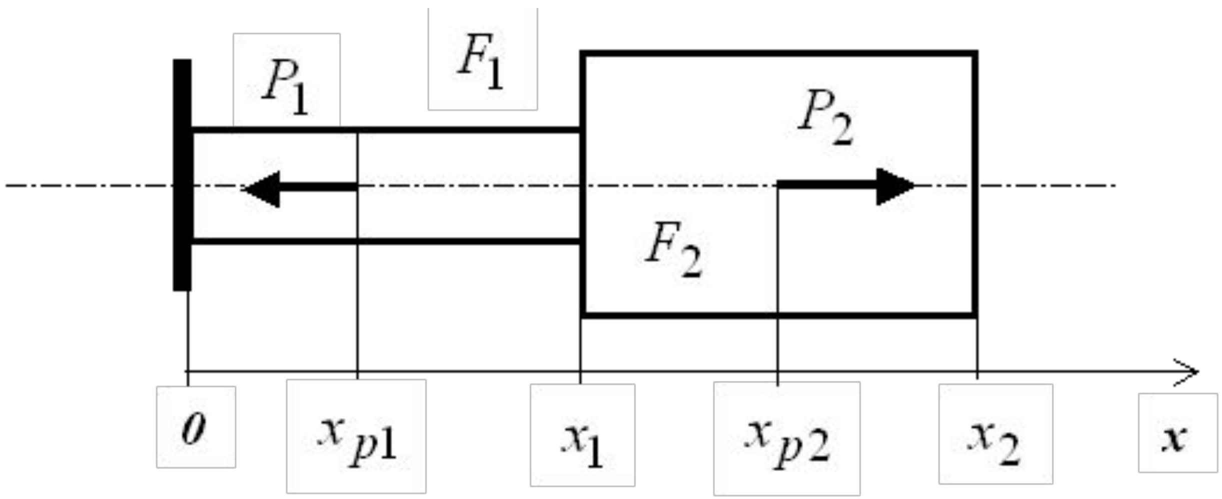
$$\Delta_T(x) = \int_0^x \alpha T(x) dx,$$

где α - коэффициент линейного температурного расширения и $T(x)$ - закон изменения температуры по длине стержня.

$$U(x) = \Delta_N(x) + \Delta_T(x) = \int_0^x \varepsilon_X(x) dx + \int_0^x \alpha T(x) dx \qquad U = \frac{N_X L}{EF} + \alpha T L$$

Построение эпюр внутренних сил, напряжений, относительных деформаций и перемещений сечений.

- Дан стержень, закрепленный с одного конца



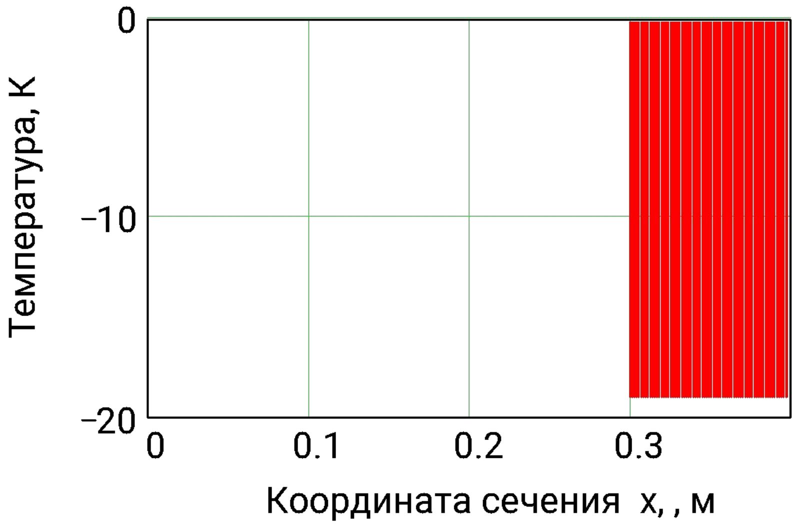
$x_1 := 0.2 \cdot m$ $\quad x_2 := 0.4 \cdot m$ $\quad x_{p1} := 0.1 \cdot m$ $\quad x_{p2} := 0.3 \cdot m$

$F_1 := 9 \cdot cm^2$ $\quad F_2 := 22 \cdot cm^2$ $\quad P_1 := 120 \cdot kN$ $\quad P_2 := 60 \cdot kN$

Распределение температуры по длине стержня

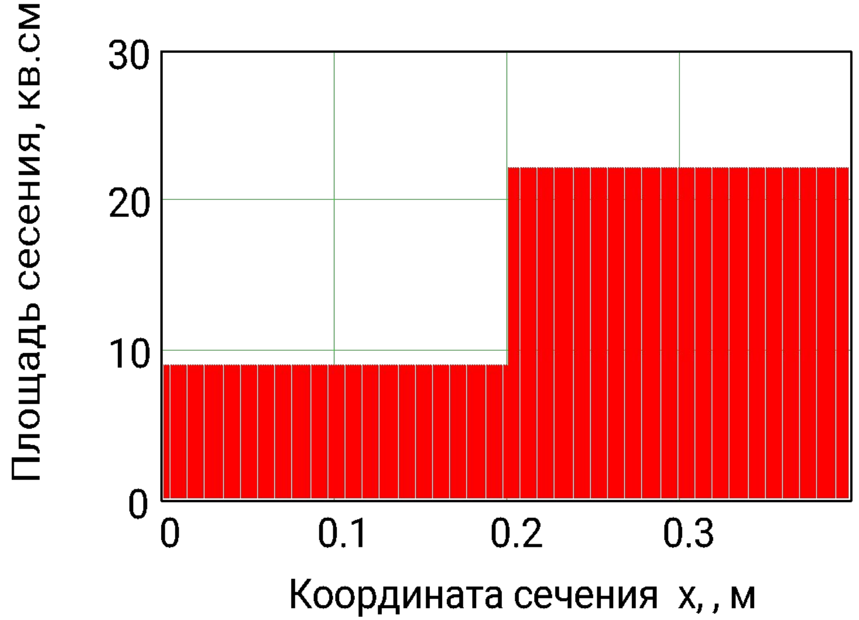
$E := 2\cdot 10^{5}\cdot MPa \qquad \Delta T := -19\,K \qquad \alpha := 1.2\cdot 10^{-5}\cdot K^{-1}$

$$T(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ 0 \le x < x_{p2} \\ \Delta T \ \text{ if } \ x_{p2} \le x < x_{2} \\ 0\cdot K \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$



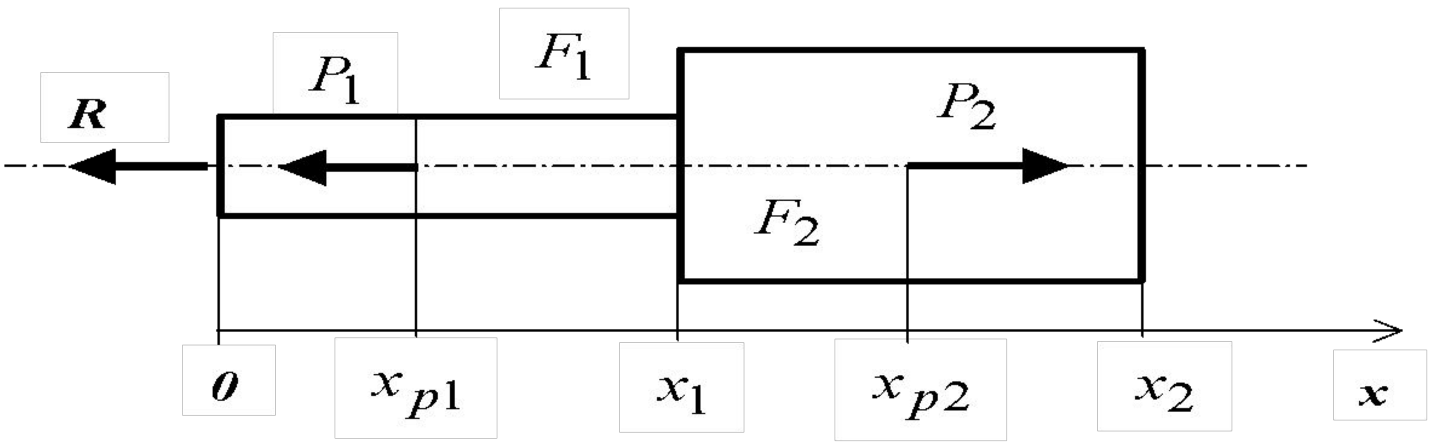
Распределение площади сечения стержня по длине стержня

$$F(x) := \begin{cases} F_1 & \text{if } 0 \le x < x_1 \\ F_2 & \text{if } x_1 \le x < x_2 \\ 0 \cdot m^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Вычисление реакции опоры R

Заделка на левом конце противодействует силам P_1 и P_2, возникает реакция опоры R. Заменим заделку этой реакцией и вычислим ее значение.



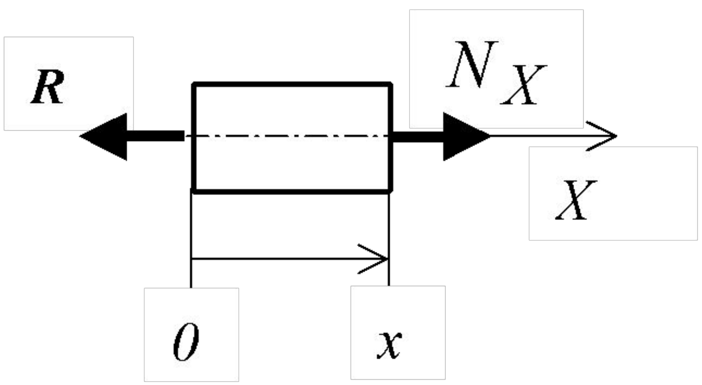
Спроектируем все силы на ось x, запишем уравнение равновесия и найдем значение R.

$$-R - P_1 + P_2 = 0\ ; \qquad R = P_2 - P_1\ .$$

Вычисление продольной внутренней силы
(Первый силовой участок)

Проведем сечение стержня на участке $0 \le x < x_{p1}$

Рассмотрим левую часть, связав с сечением координатную систему (X, *Y*, *Z*). Действие отброшенной правой части на левую часть заменим силой N_X, направив ее от сечения в направлении оси *X*.

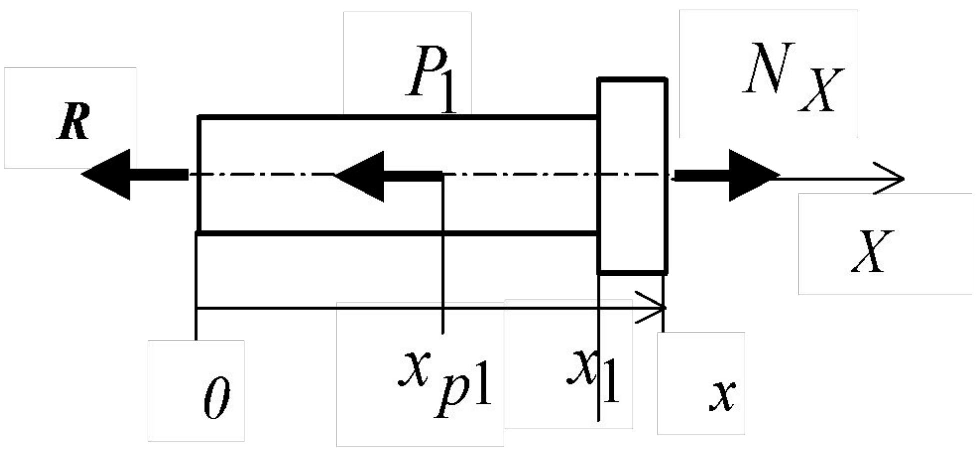


$$-R_1 + N_X = 0$$

$$N_X = R = P_2 - P_1$$

Вычисление продольной внутренней силы
(Второй и третий силовой участок)

Проведем сечение стержня на участке $x_{p1} \le x < x_{p2}$

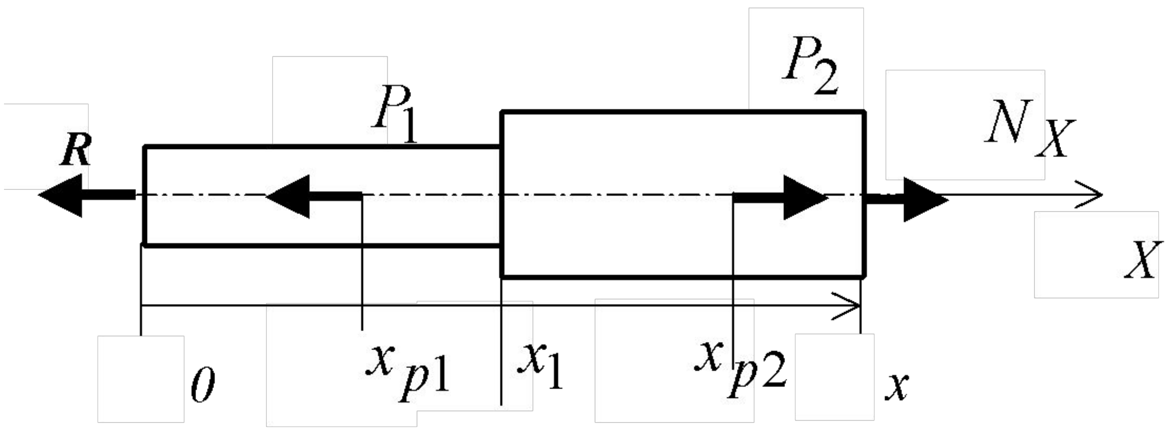


$$-R_1 - P_1 + N_X = 0$$

$$N_X = R + P_1 = P_2$$

Вычисление продольной внутренней силы
(Четвертый силовой участок)

Проведем сечение стержня на участке $x_{p2} \le x \le x_2$



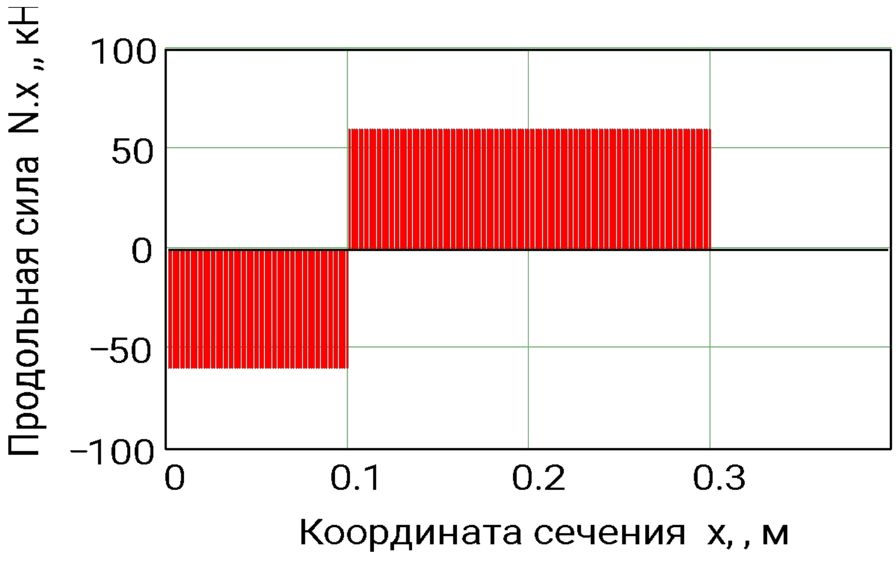
$$R = P_2 - P_1$$

$$-R_1 - P_1 + P_2 + N_X = 0 \qquad N_X = R + P_1 - P_2 = 0$$

Эпюра продольной внутренней силы

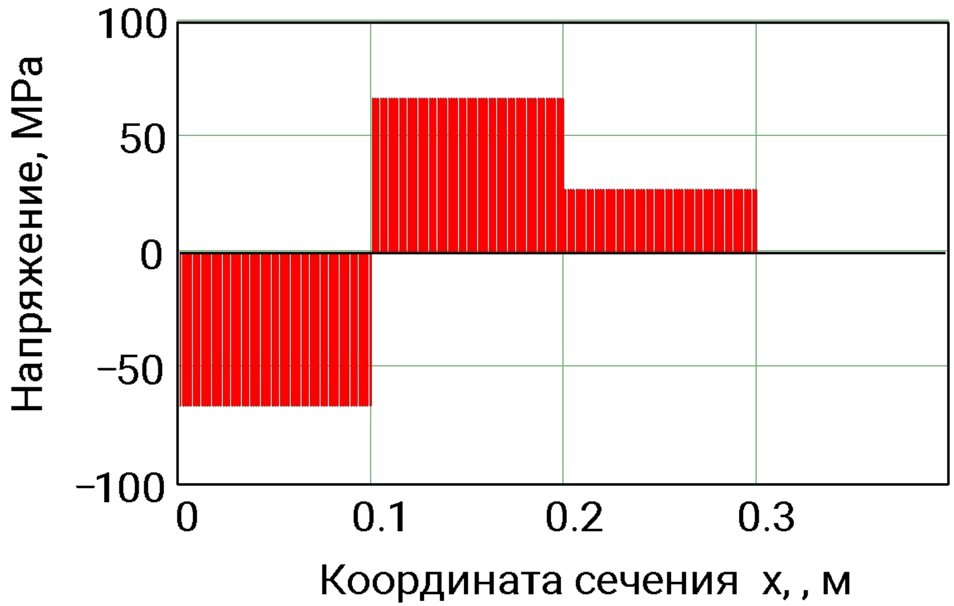
Внутренняя продольная сила равна алгебраической сумме сил, действующих по одну сторону от сечения. Сила, направленная справа налево, берется со знаком «плюс» .

$$N_X(x) := \begin{cases} R & \text{if } 0 \le x < x_{p1} \\ R + P_1 & \text{if } x_{p1} \le x < x_{p2} \\ R + P_1 - P_2 & \text{if } x_{p2} \le x \le x_2 \\ 0 \cdot kN & \text{otherwise} \end{cases}$$



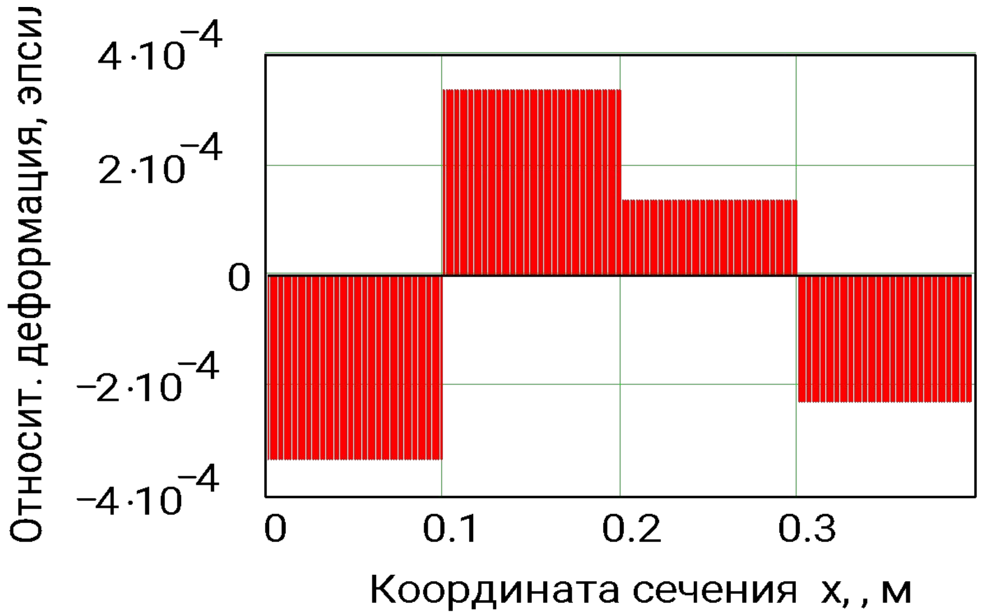
Эпюра нормальных напряжений

$$\sigma_x(x) := \frac{N_x(x)}{F(x)}$$



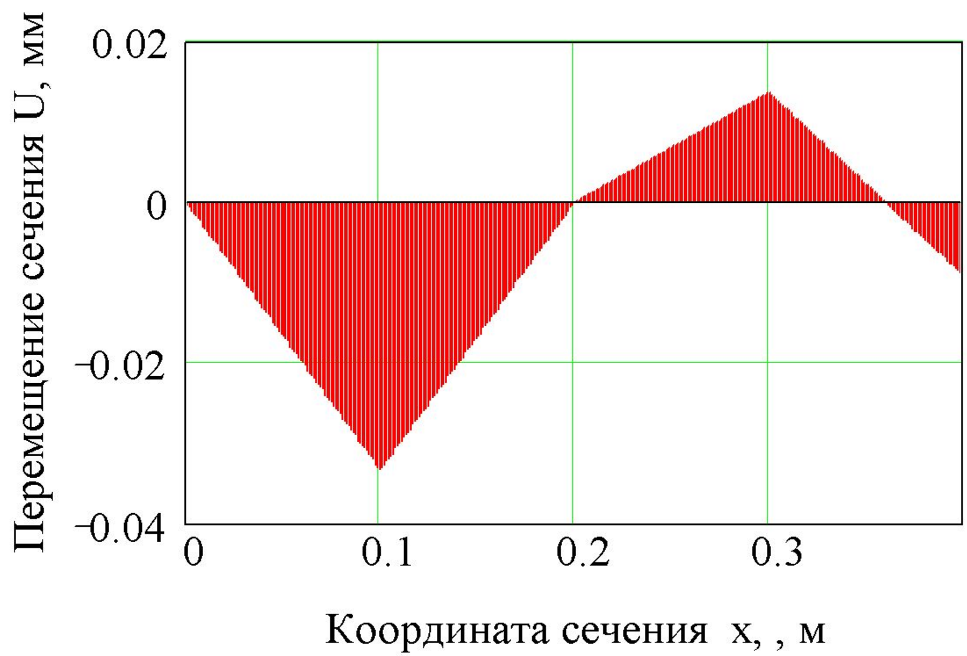
Эпюра относительных линейных деформаций

$$\varepsilon_{\chi}(x) := \frac{\sigma_{\chi}(x)}{E} + \alpha \cdot T(x)$$



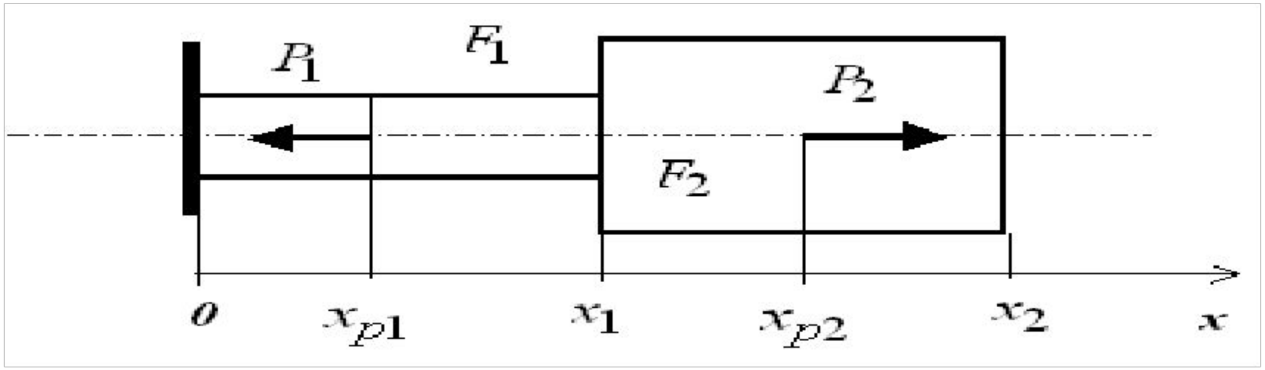
Эпюра перемещений сечений стержня относительно опоры

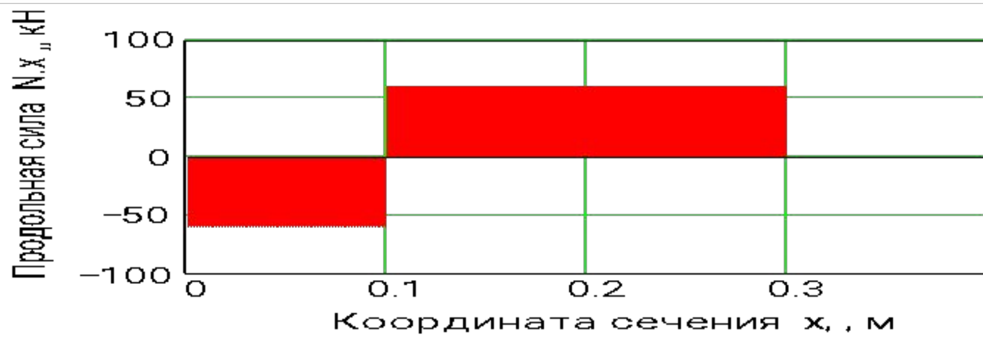
$$U(x) = \int_{x}^{0} \varepsilon_x(x)\,dx$$



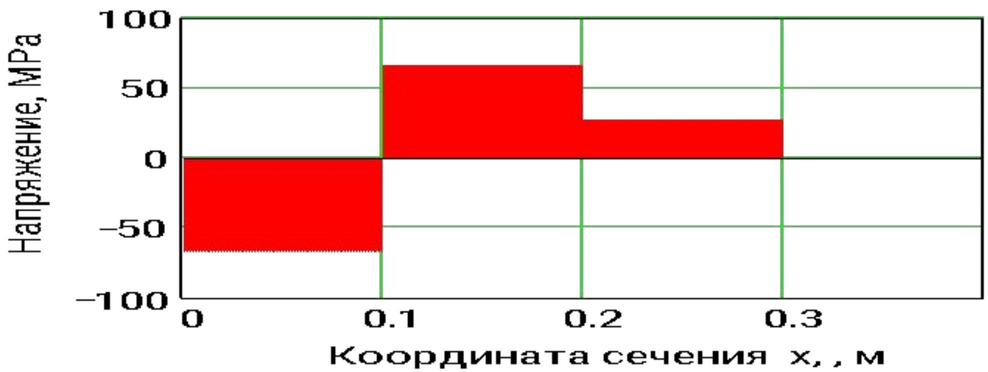
Итоги построения эпюр

Объединим рисунок стержня и все построенные эпюры



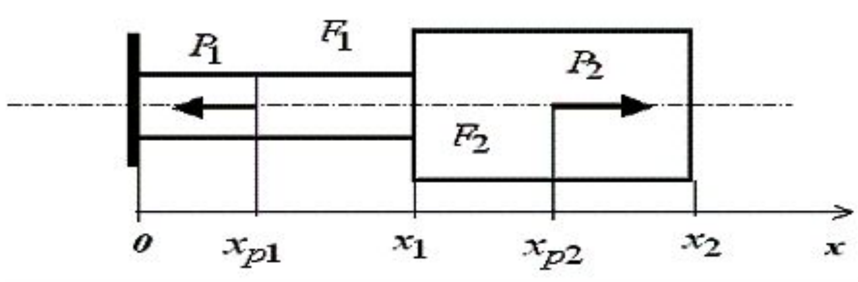


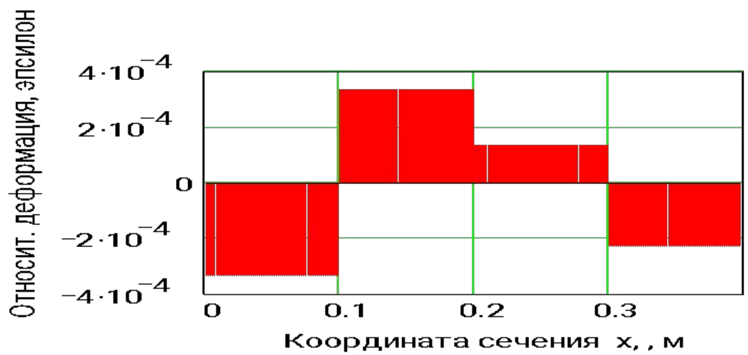
Эпюра N_X



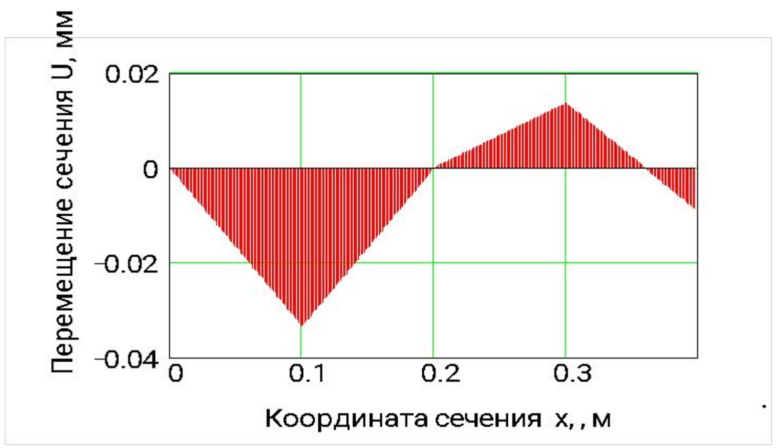
Эпюра σ_X

Итоги построения эпюр (продолжение)





Эпюра ε_X



Эпюра U_X