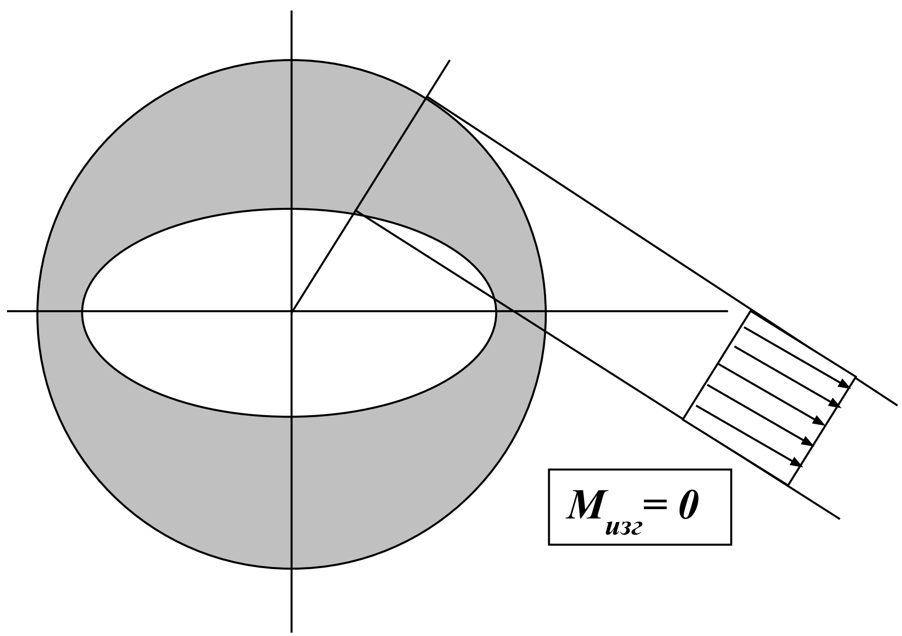
Лекция 4. Тонкостенные оболочки и толстостенные трубы

Оболочка – это тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше других размеров.

Срединная поверхность оболочки – это геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки.

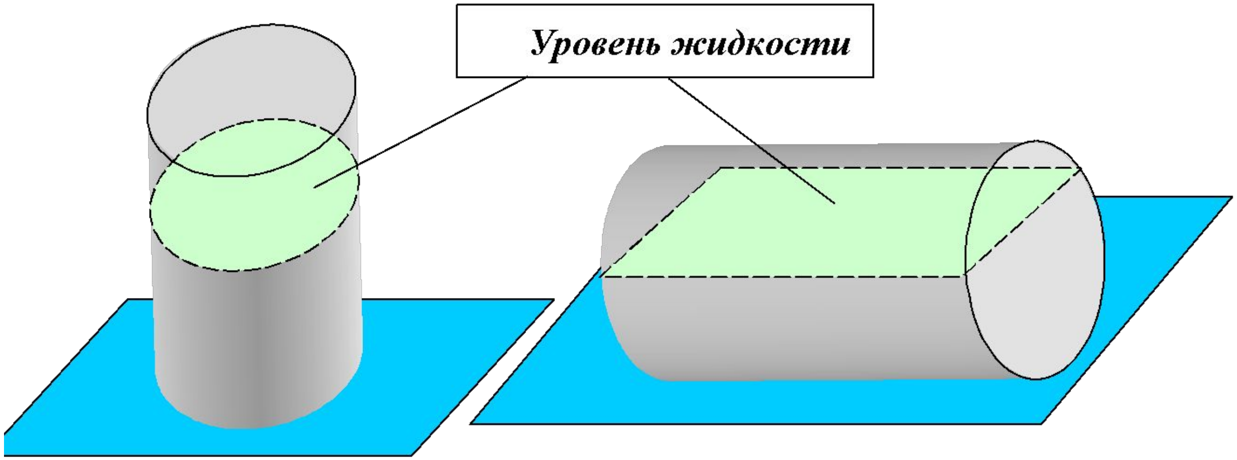


Исходные положения безмоментной теории

1. Сосуд имеет форму тела вращения (срединная поверхность – тело вращения), толщина сосуда необязательно постоянна.
2. Толщина всех стенок сосуда ***δ*** должная быть малой по сравнению с радиусом кривизны оболочки ***R***:

$$\frac{\delta}{R} \le \frac{1}{20}$$

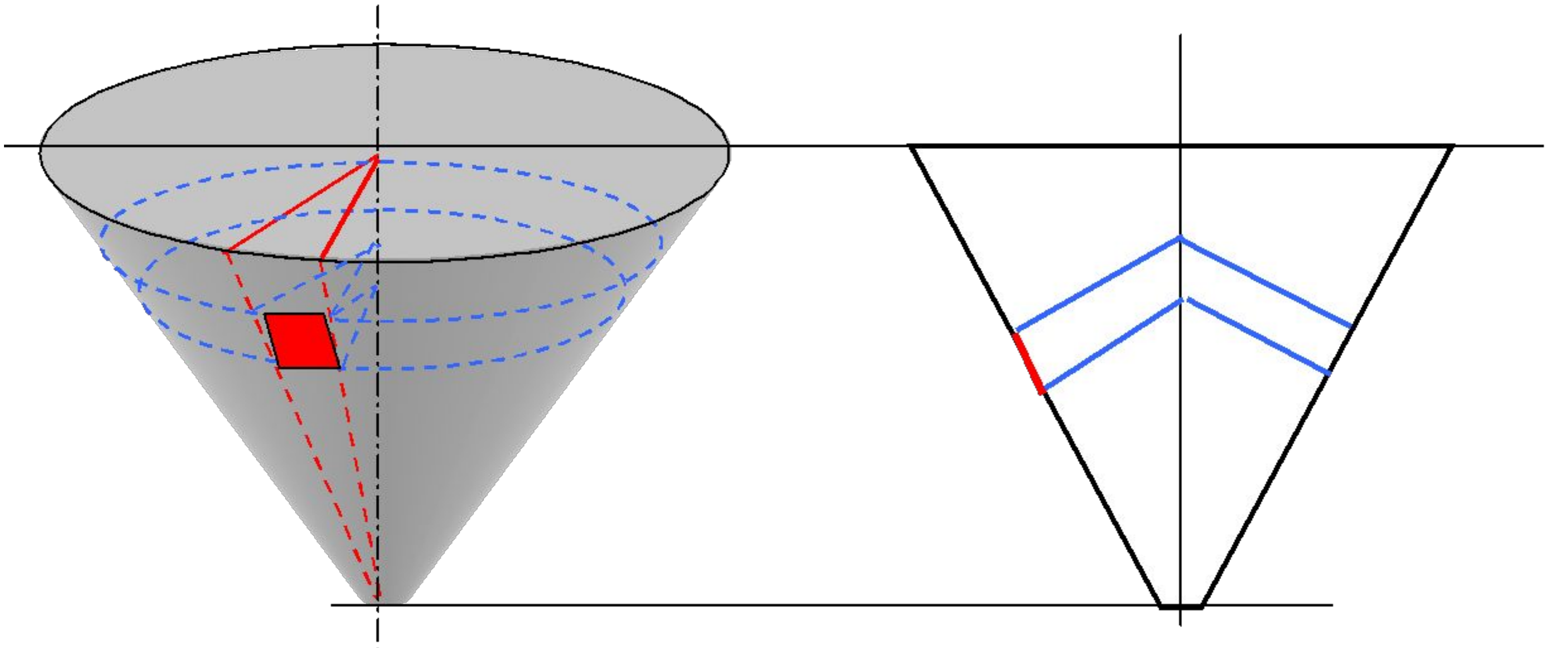
3. Нагрузка должна быть распределенной и осесимметричной относительно оси вращения – это газовое и гидростатическое давление



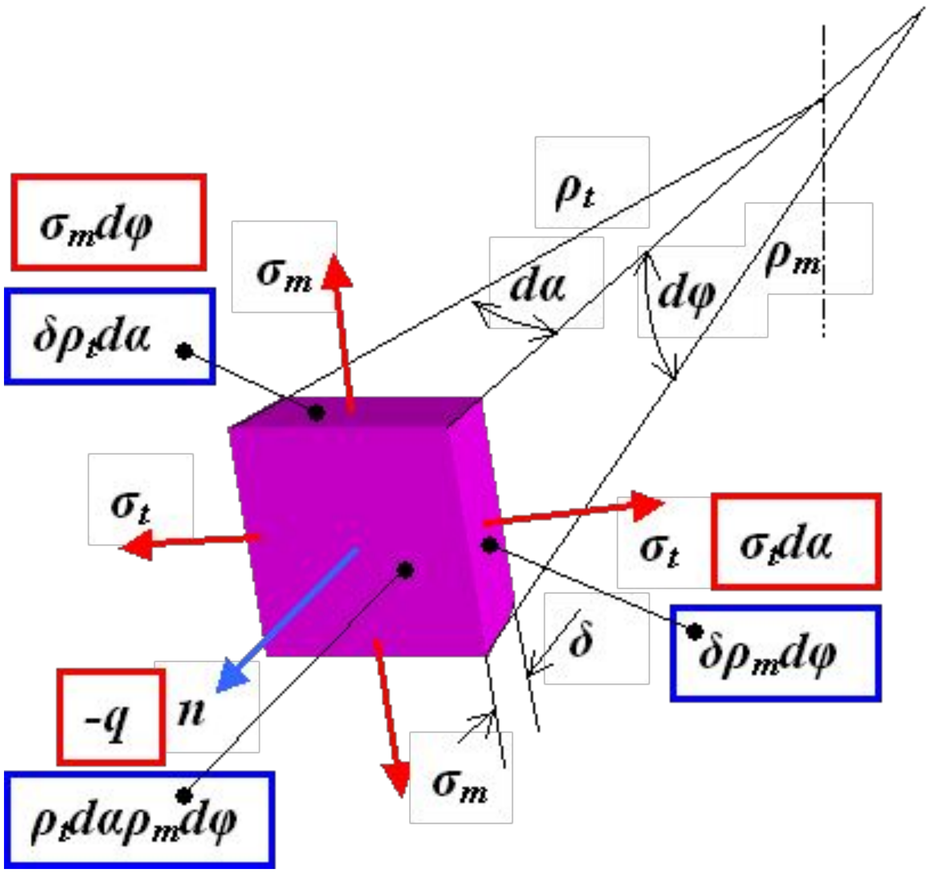
Теория применима. Теория неприменима.

Уравнение Лапласа

Рассмотрим тонкостенную оболочку, нагруженную внутренним давлением. Двумя меридиональными сечениями и двумя нормальными коническими сечениями вырежем элемент оболочки.



Уравнение Лапласа, элемент оболочки



Уравнение Лапласа, равновесие элемента

Спроектируем все силы на направление нормали ***n***:

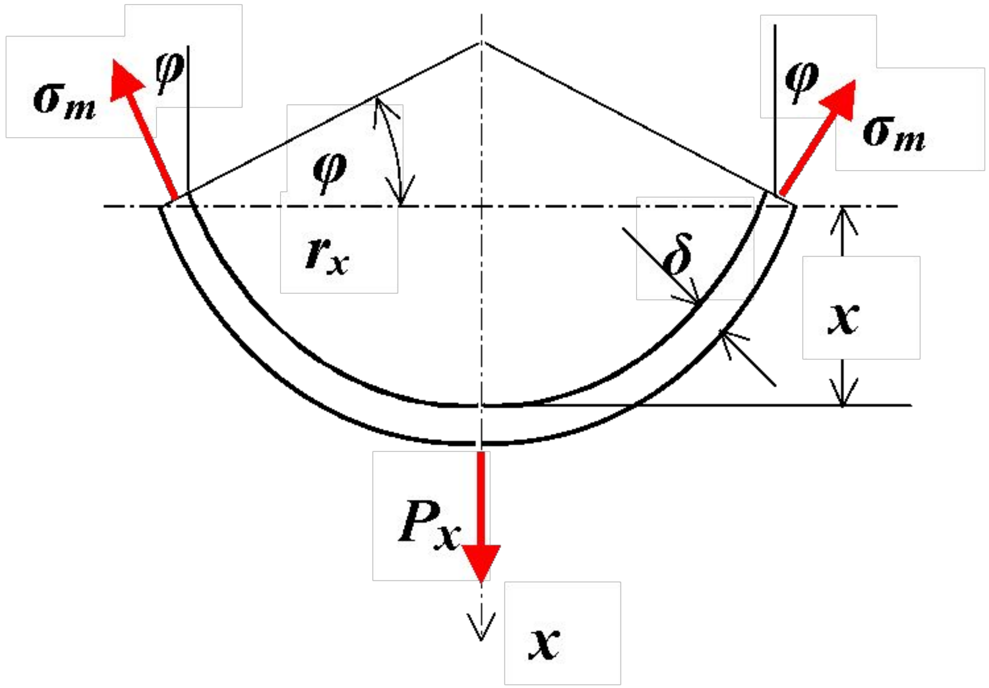
$$\sigma_m d\varphi.\delta.\rho_t d\alpha + \sigma_t d\alpha.\delta.\rho_m d\varphi - q\rho_t d\alpha.\rho_m d\varphi = 0$$

Сначала сократим на $d\varphi d\alpha$, а затем все разделим на $\delta\rho_t\rho_m$.
В результате получаем известную формулу Лапласа:

$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}} \qquad (*)$$

Равновесие части тонкостенной оболочки

Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части:



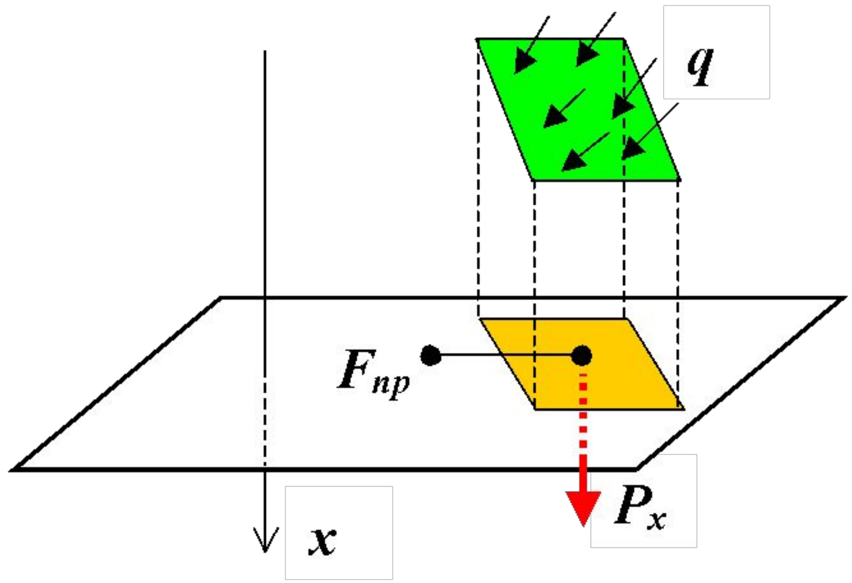
$$\sigma_m . 2\pi r_x \delta \cos(\varphi) - P_x = 0$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta \cos(\varphi)}} \quad (**)$$

Теорема 1

<u>*Теорема 1.*</u>

$$P_x(q) = qF_{np}$$

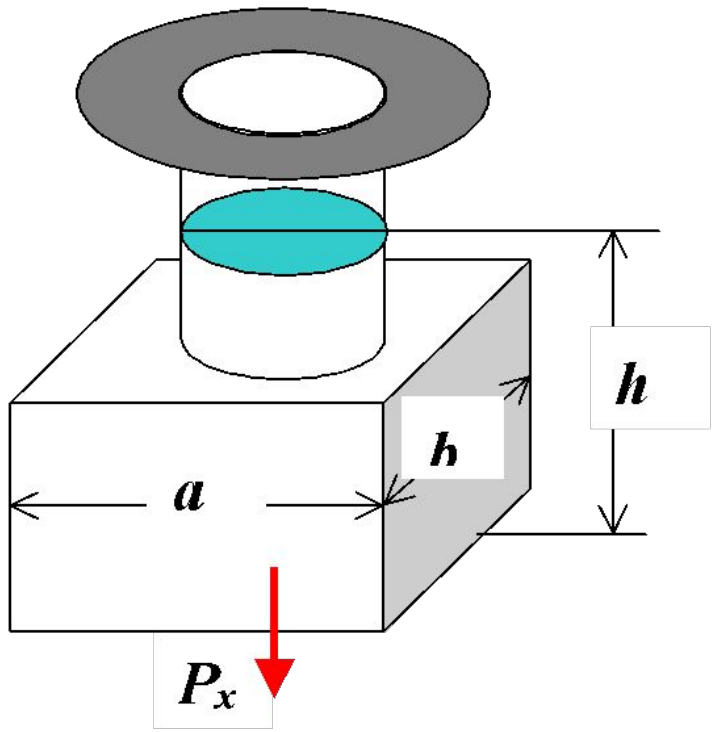


Если на какую либо поверхность действует равномерно распределенное давление ***q*** , то ***<u>независимо</u>*** от формы поверхности, проекция равнодействующей $\boldsymbol{P_x}$ сил давления на заданную ось ***x*** равна произведению давления ***q*** на площадь проекции $\boldsymbol{F_{np}}$ данной поверхности на плоскость, перпендикулярную заданной оси.

Теорема 2

<ins>*Теорема 2.*</ins>

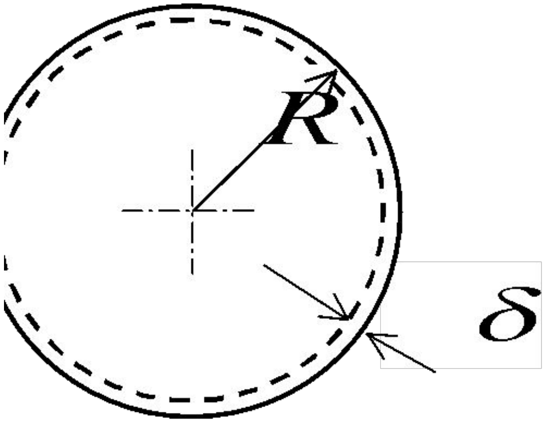
$$P_x(\gamma) = \gamma abh$$



Если на некоторую поверхность, например на дно, действует давление жидкости с удельным весом γ, то вертикальная составляющая P_x сил давления жидкости равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Напряжения в сфере под давлением

Сфера



$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}$$

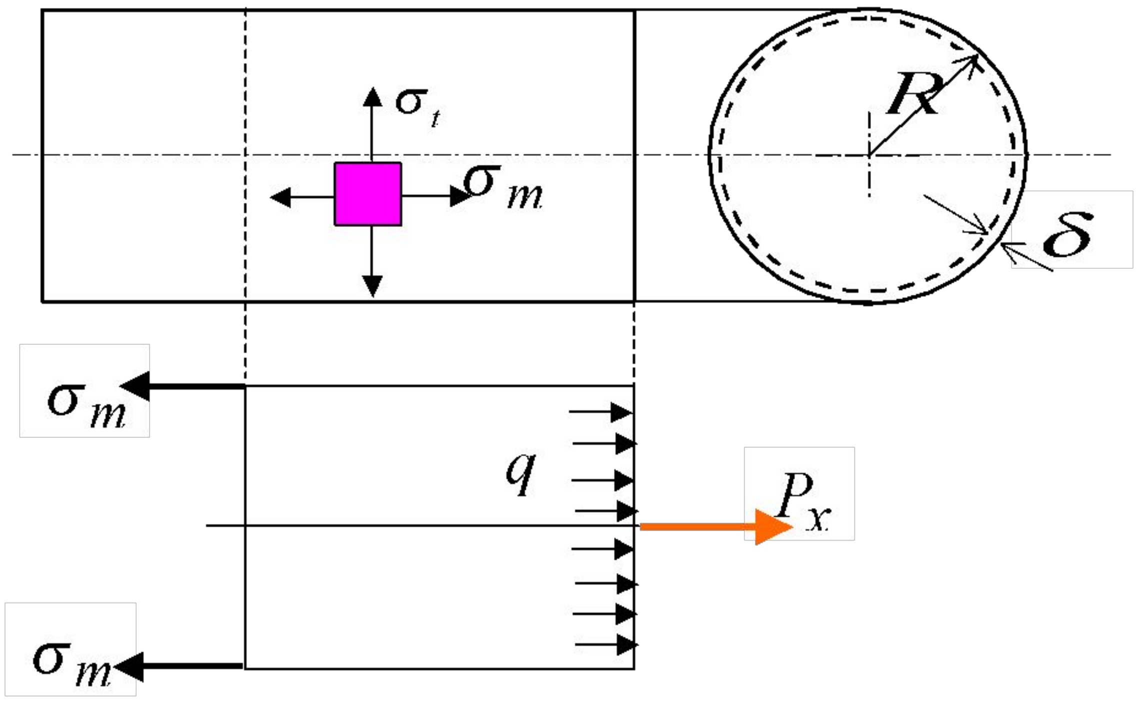
$$\rho_m = \rho_t = R$$

В силу сферической симметрии

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{qR}{\delta}$$

Напряжения в трубе под давлением

Цилиндр

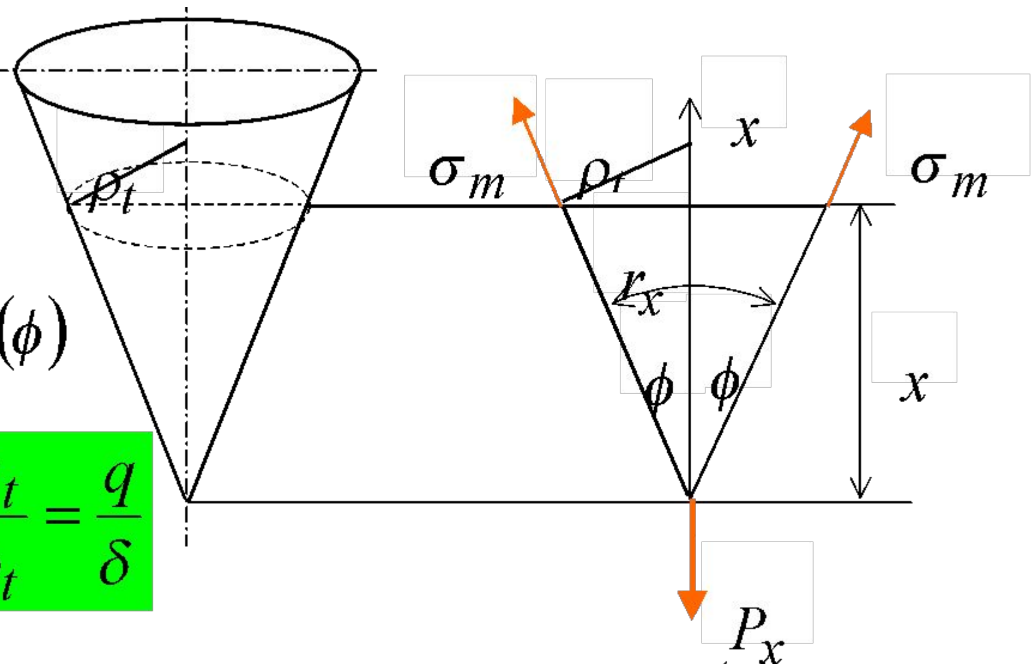


$$\frac{\sigma_m}{\rho_m}+\frac{\sigma_t}{\rho_t}=\frac{q}{\delta}$$; $\rho_m=\infty$; $\rho_t=R$; $\sigma_t=\frac{qR}{\delta}$

$$\sigma_m=\frac{P_x}{2\pi r_x\delta\cos(\varphi)}$$; $P_x=q\pi R^2$; $\sigma_m=\frac{qR}{2\delta}$

Напряжения в конусе под давлением

Конус



$$r_x = xtg(\phi)$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}$$

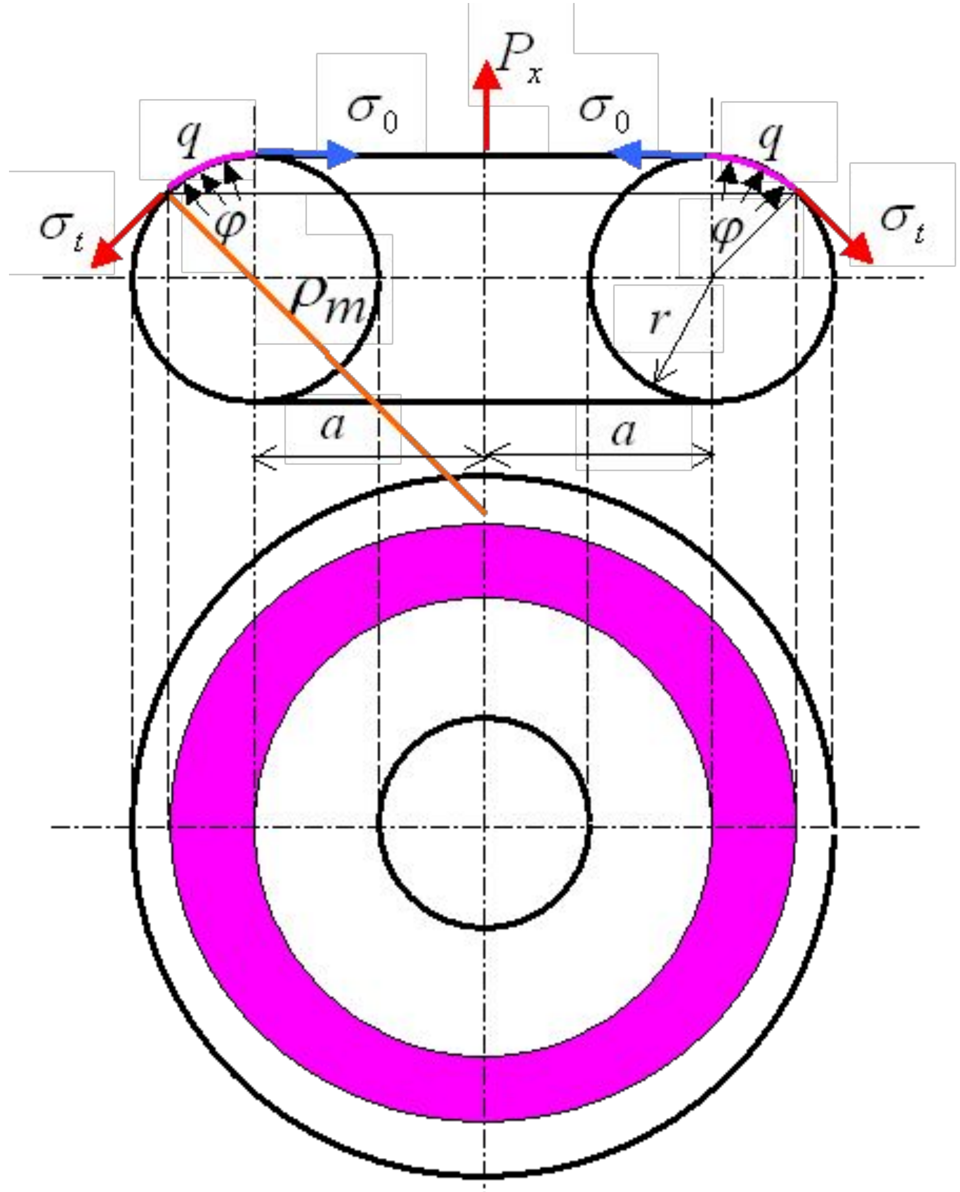
$$\rho_m = \infty\ ; \quad \rho_t = \frac{xtg(\phi)}{\cos(\phi)}\ ; \quad \sigma_t = \frac{qxtg(\phi)}{\delta\cos(\phi)}$$

$$\sigma_m = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta\, cos(\varphi)};$$

$$P_x = q\pi\left(xtg(\phi)\right)^2;$$

$$\sigma_m = \frac{qxtg(\phi)}{2\delta\cos(\phi)}$$

Торовая оболочка



Напряжения в торе под давлением

Для выделенного элемента тора

$$\sigma_t = \frac{P_x}{2\pi r_x \delta \sin(\varphi)};$$

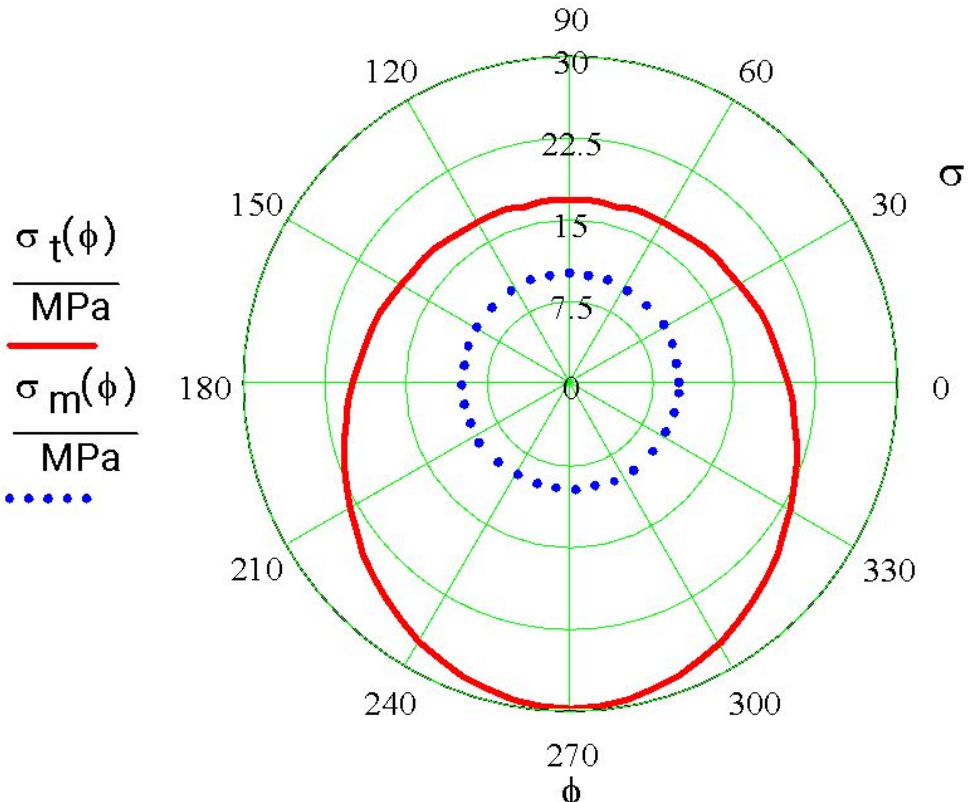
$$P_x = q\pi\left(r_x^{\ 2} - a^2\right) \qquad r_x = a + r\sin(\phi)$$

$$\sigma_t = \frac{qr}{2\delta}\frac{2a + r\sin(\phi)}{a + r\sin(\phi)}$$

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta};$$

$$\rho_m = \frac{a + r\sin(\phi)}{\sin(\phi)}; \quad \sigma_m = \frac{qr}{2\delta}$$

Напряжения в торе (продолжение)



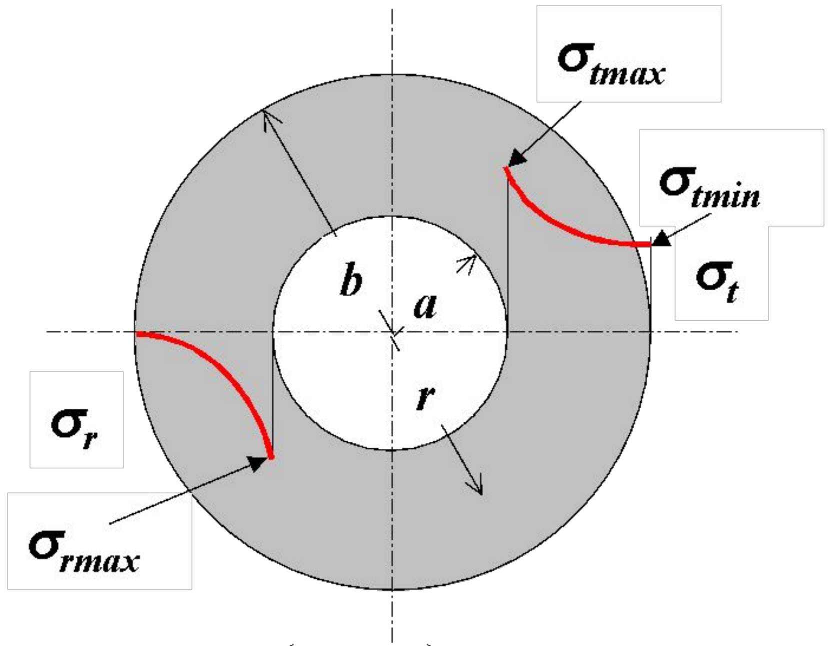
$$\sigma_t(\phi) = \frac{q \cdot r}{2 \cdot \delta} \cdot \frac{2 \cdot a + r \cdot \sin(\phi)}{a + r \cdot \sin(\phi)}$$

$$\sigma_m(\phi) = \frac{q \cdot r}{2 \cdot \delta}$$

Окружное напряжение

Меридиональное напряжение

Толстостенная труба (формулы Лямэ)



$$\sigma_r(r) = \frac{qa^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right); \quad \sigma_{r\max} = -q; \quad \sigma_{r\min} = 0$$

$$\sigma_t(r) = \frac{qa^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right); \quad \sigma_z = \frac{qa^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_{t\max} = \frac{q\left(b^2 + a^2\right)}{b^2 - a^2}; \quad \sigma_{t\min} = \frac{2qa^2}{b^2 - a^2}$$

Погрешность при замене формулы Лямэ на формулу Лапласа

$$\gamma(s) = \frac{1}{1 + 4\cdot\left(\frac{R}{s}\right)^2}$$