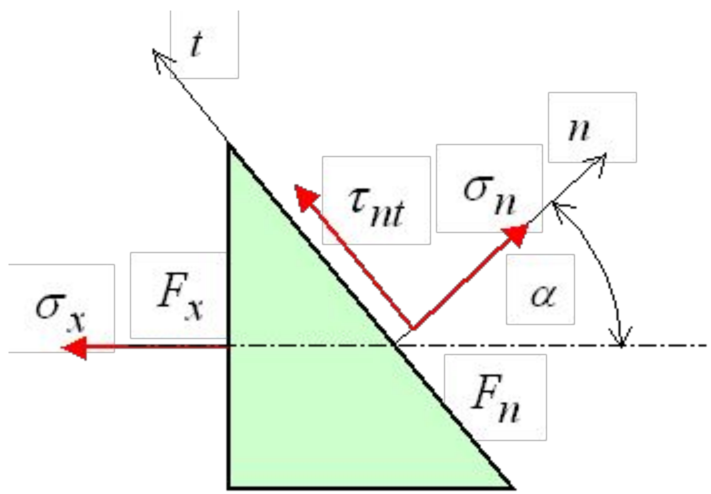
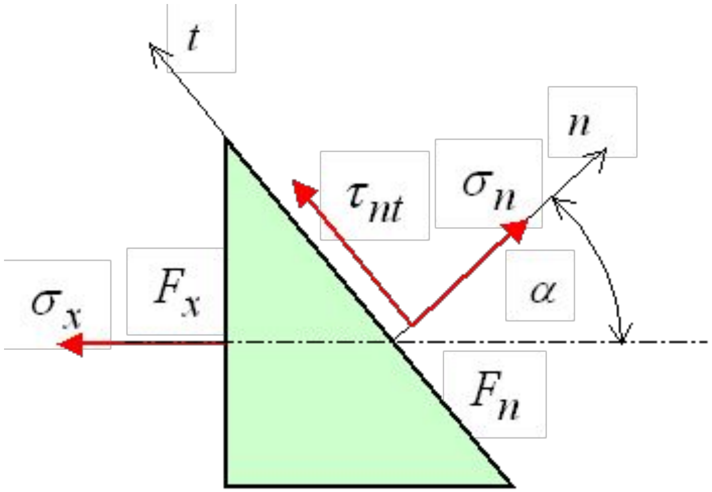
Лекция 7. Анализ напряженного состояния

Твердое тело реагирует на внешнее воздействие целиком, как сплошная среда. Но реакция в каждой точке тела будет различной.

Математическое описание этой реакции в выбранной точке тела зависит от выбора системы координат, связанной с этой точкой.



Напряжения на наклонной площадке при растяжении стержня



$$F_n = \frac{F_x}{cos(\alpha)}$$

Спроектируем все силы на направление нормали n,

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) = 0,$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(\alpha)$$

Спроектируем все силы на направление оси t,

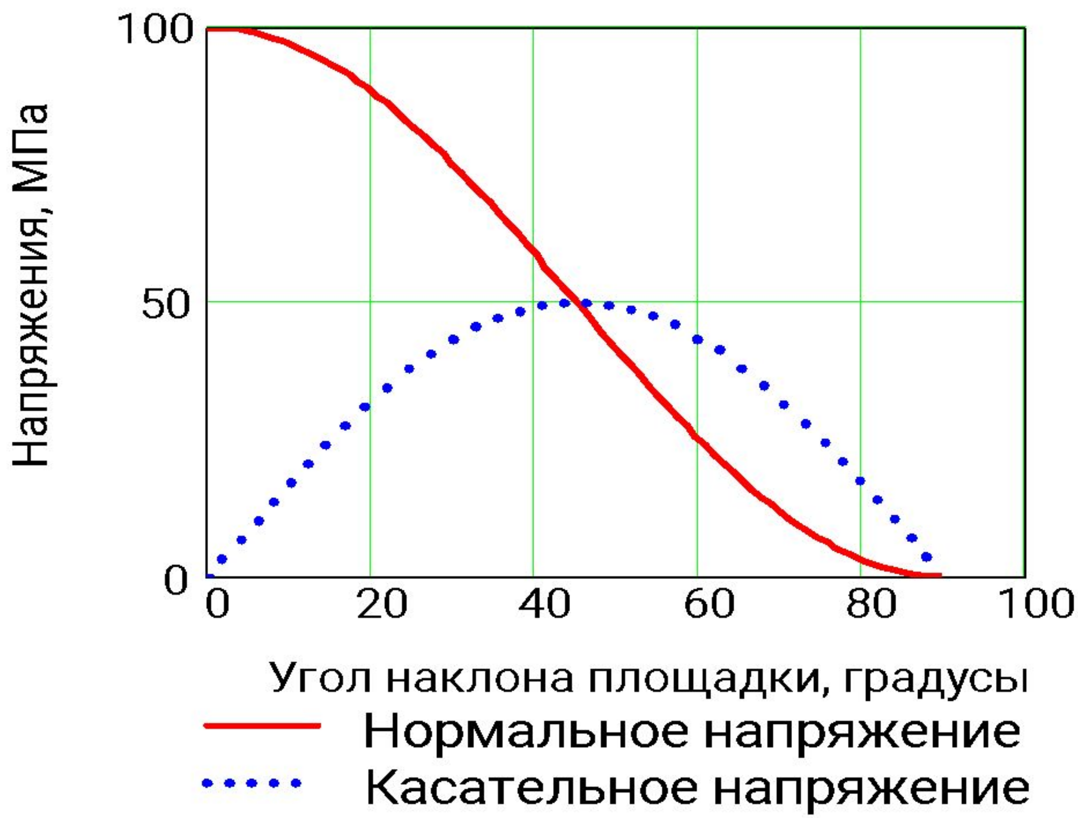
$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) = 0,$$

$$\tau_{nt} = -\sigma_x \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

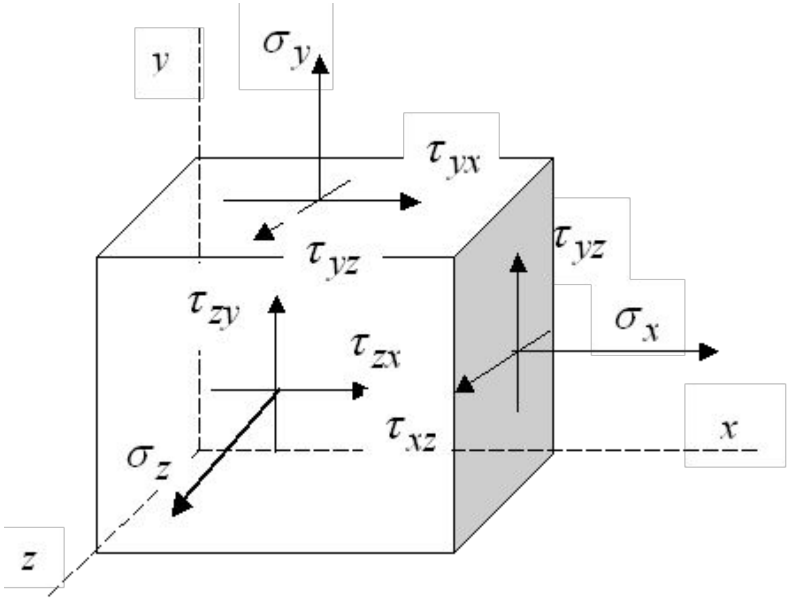
Напряжения на наклонной площадке при растяжении стержня (продолжение)

$$\sigma_n(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos(\alpha)^2$$

$$\tau_{nt}(\alpha) := \sigma_x \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$



Напряженное состояние в произвольной точке



$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

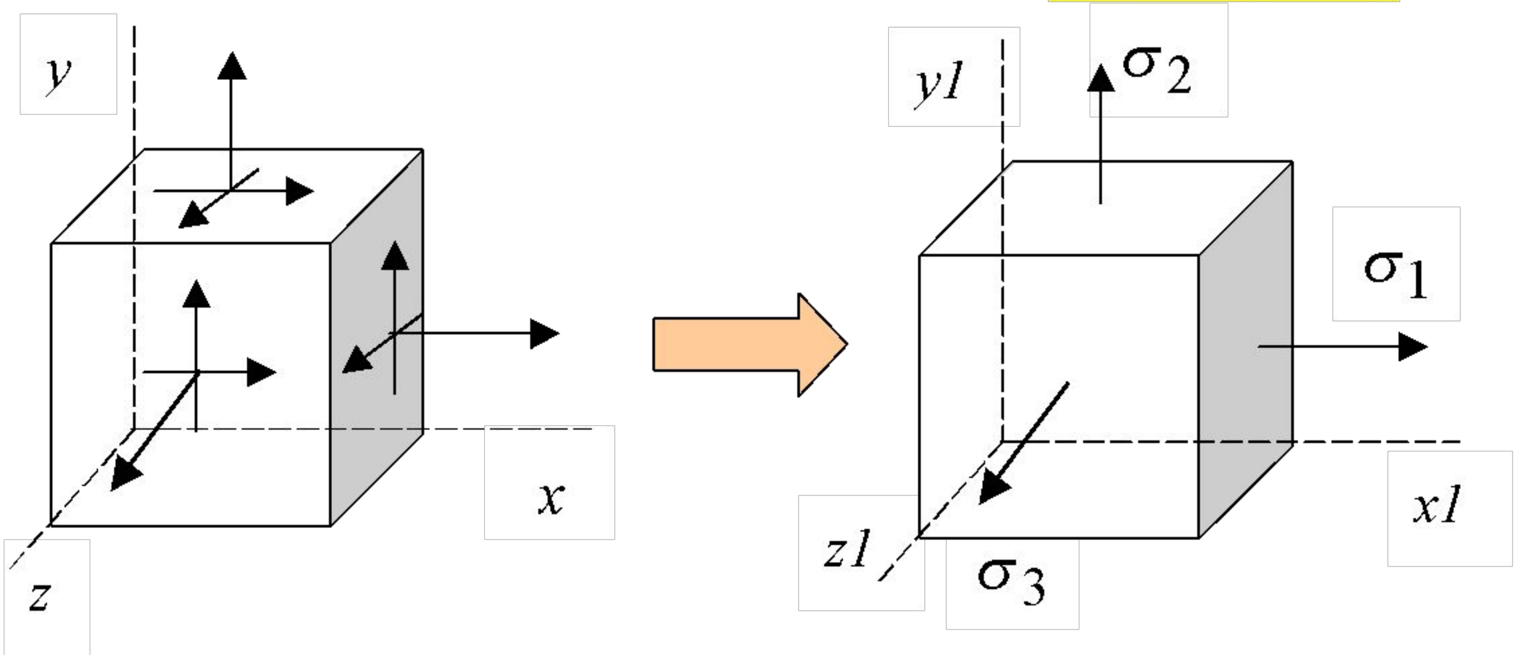
Касательные напряжения должны удовлетворять условиям равновесия – сумма обусловленных ими вращающих моментов должна быть равна нулю. Из этого следует ***закон парности*** касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,.$$

Касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, равны и направлены либо к общему ребру, либо от ребра.

Теория упругости доказывает, что

1. Всегда существуют площадки, на которых ***отсутствуют*** касательные напряжения.
2. Эти площадки взаимно перпендикулярны и называются ***главными*** площадками.
3. На трех ***главных*** площадках действуют только нормальные напряжения, которые называют ***главными***. Их обозначают как σ_1, σ_2 и σ_3, причем, по соглашению, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.



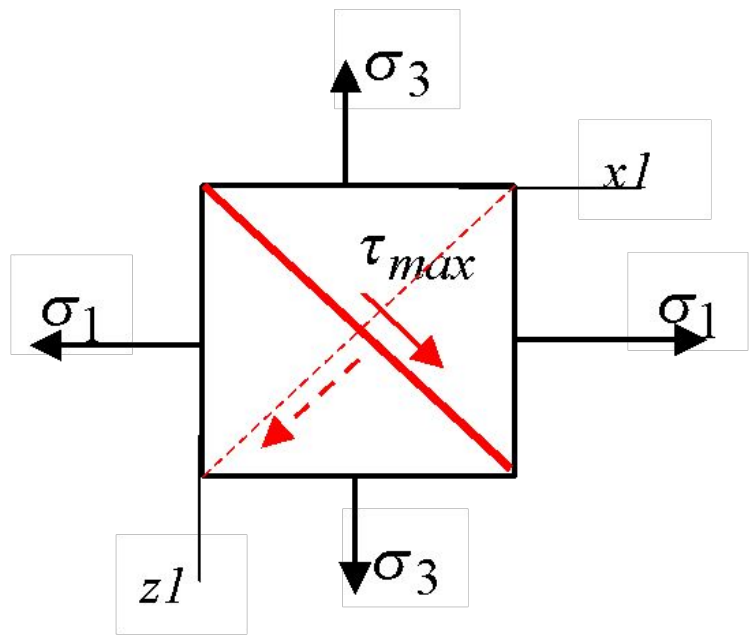
Теория упругости доказывает, что (продолжение)

1. Напряжения σ_1 и σ_3 - это экстремальные значения нормальных напряжений для всех площадок, проходящих через данную точку.
2. Тензор главных напряжений Σ_{123} имеет диагональный вид.
3. Наибольшие касательные напряжения τ_{max} равны

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

и действуют на площадке, наклоненной к σ_1 и σ_3 на 45°.

$$\Sigma_{123} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$



Классификация напряженных состояний

Трехосное или объёмное

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 \neq 0$$

Двухосное или плоское

$$\boxed{\sigma_1 = 0} \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \sigma_3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_2 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \boxed{\sigma_2 = 0} \qquad \sigma_3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_3$$

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \boxed{\sigma_3 = 0} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{max} = \sigma_1 \quad \sigma_{min} = \sigma_2$$

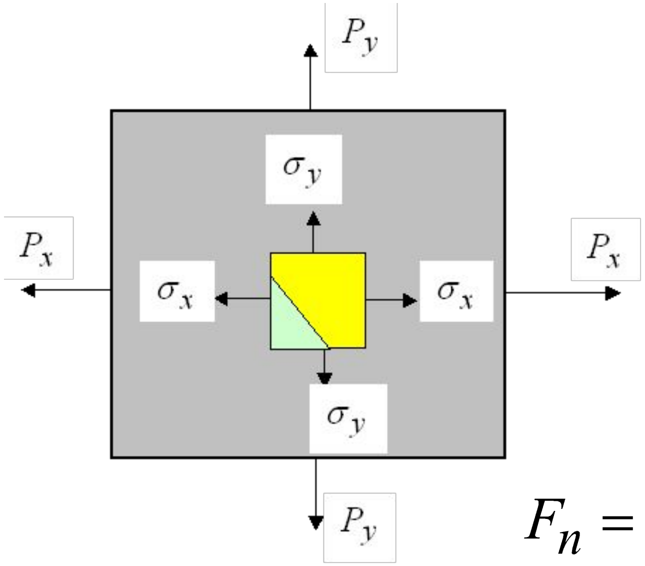
Одноосное или линейное

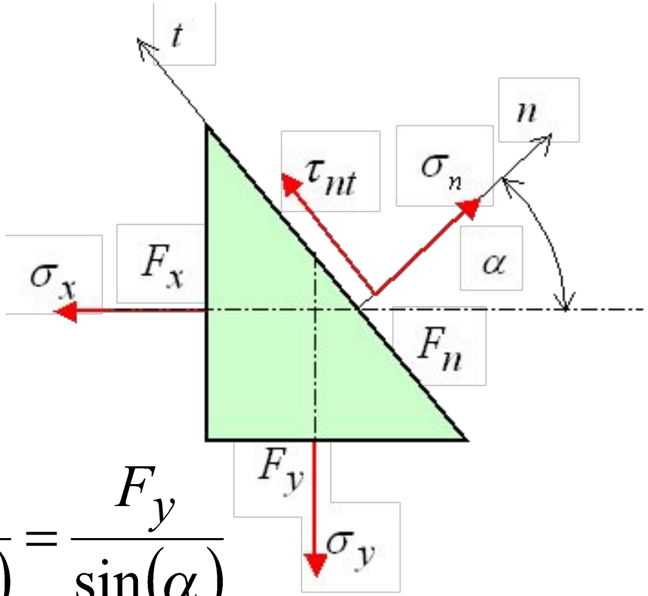
$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \boxed{\sigma_2 = 0} \qquad \boxed{\sigma_3 = 0}$$

$$\boxed{\sigma_1 = 0} \qquad \boxed{\sigma_2 = 0} \qquad \sigma_3 \neq 0$$

Для уверенного определения типа напряженного состояния необходимо знать значения всех трех главных напряжений.

Анализ двухосного напряженного состояния





$$F_n = \frac{F_x}{cos(\alpha)} = \frac{F_y}{\sin(\alpha)}$$

Спроектируем все силы на ось ***n***

$$\sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos(\alpha) - \sigma_y F_y \sin(\alpha) = 0$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha)$$

Спроектируем все силы на ось ***t***

$$\tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin(\alpha) - \sigma_y F_y \cos(\alpha) = 0$$

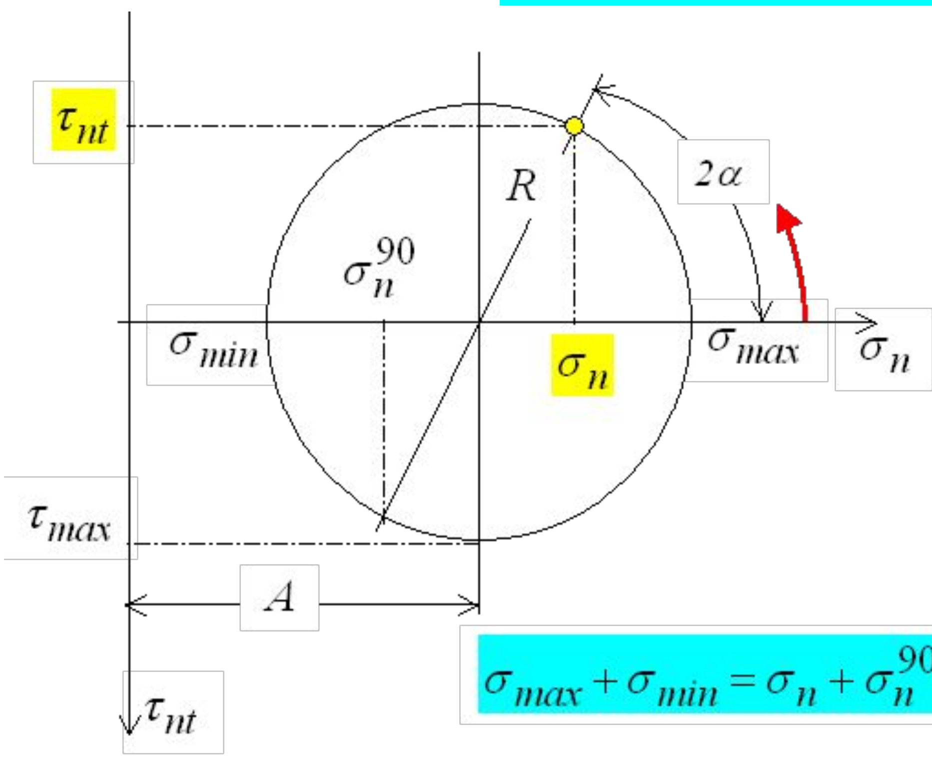
$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha)$$

Круг Мора

$$\sigma_{max} = \sigma_x \qquad \sigma_{min} = \sigma_y$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} cos(2\alpha)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} sin(2\alpha)$$

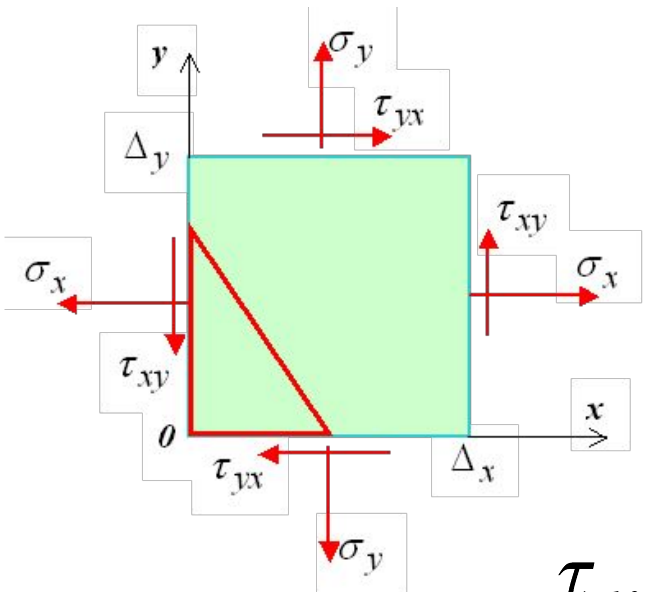


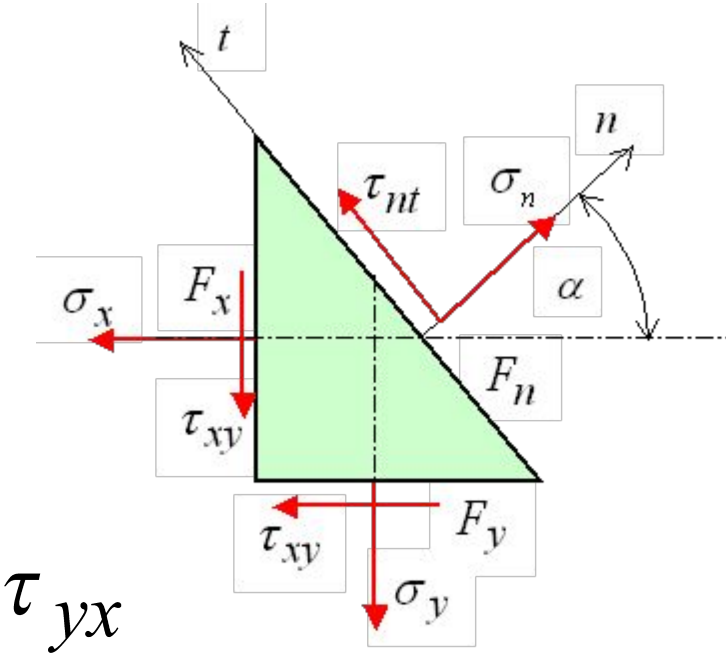
$$\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_n + \sigma_n^{90}$$

$$A = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$R = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Общий случай анализа двухосного НС





$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(1) $$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

(2) $$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\cos(2\alpha)$$

Вычисление главных напряжений

Допустим, что наклонная площадка главная, т.е. $\tau_{nt} = 0$.

Из уравнения (2) получаем направление главного напряжения

$$tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

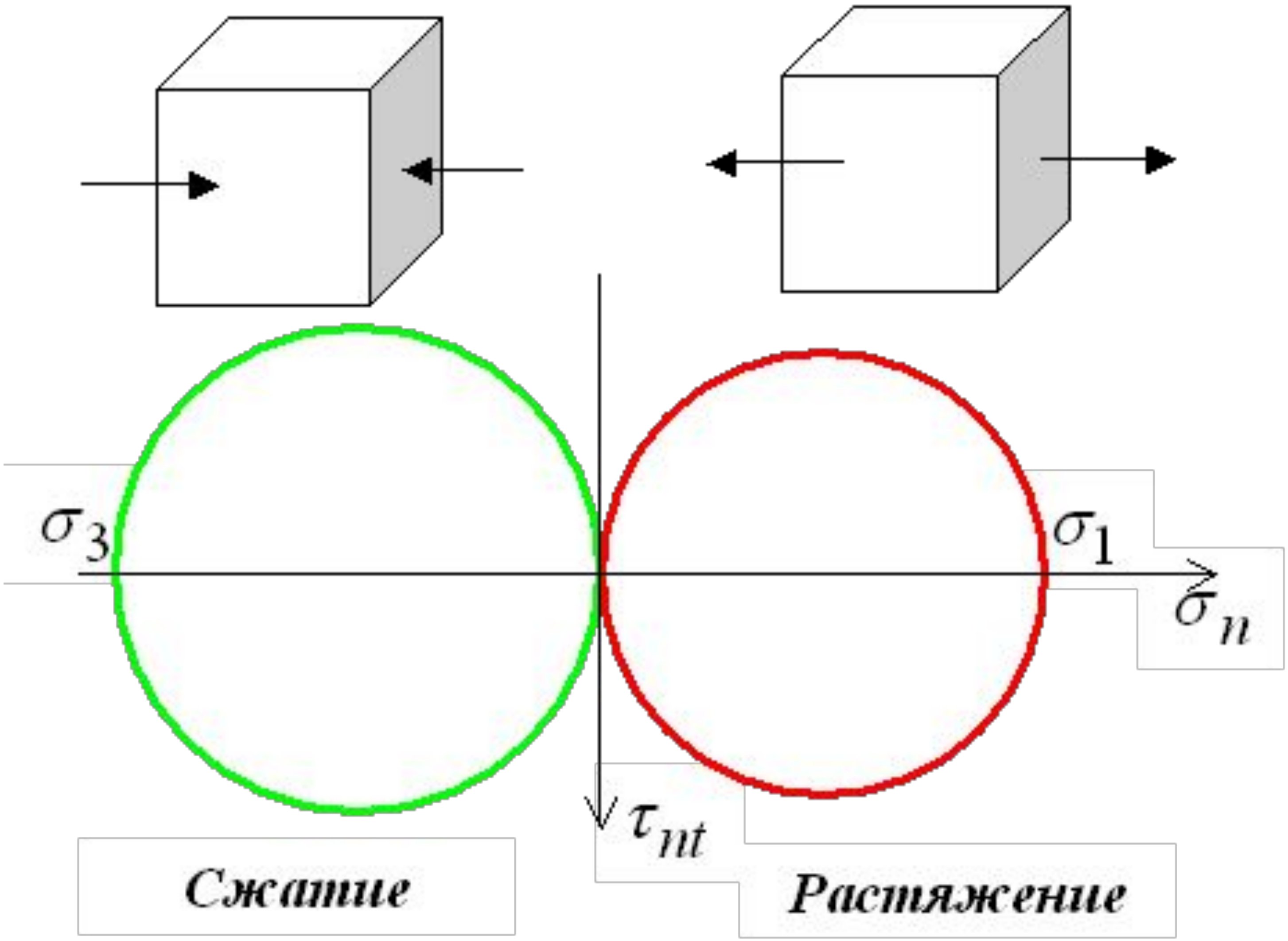
Уравнение (1) приводится к следующему виду:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

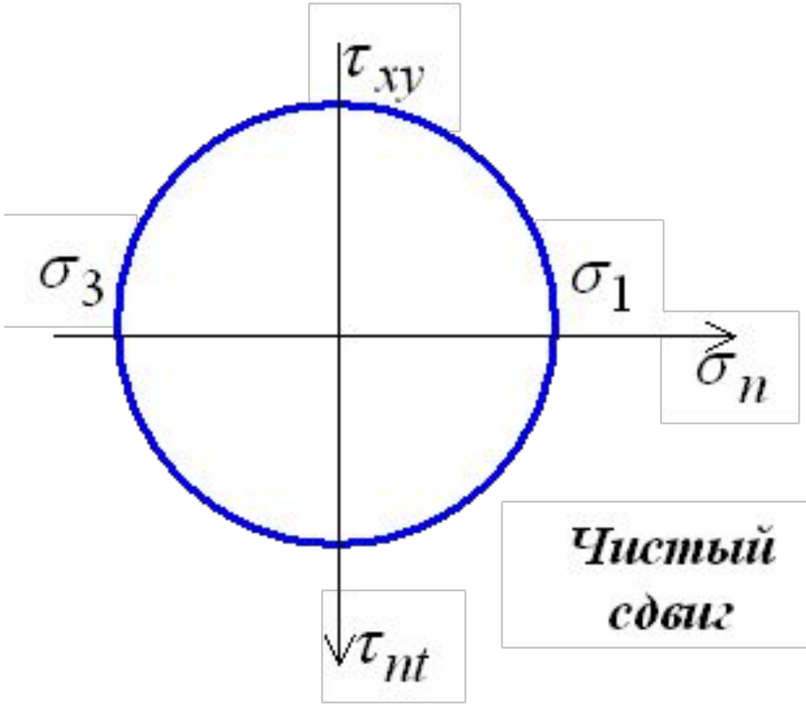
$$\sigma_x > \sigma_y \qquad \sigma_n = \sigma_{max}$$

$$\sigma_{max/min} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

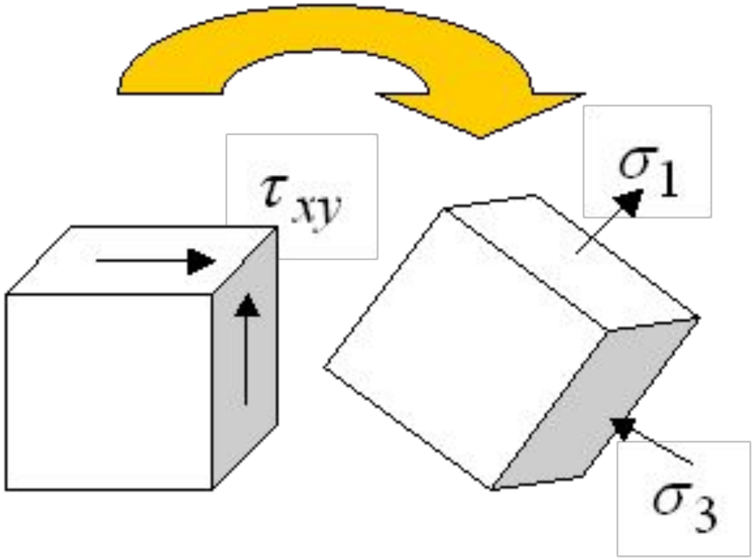
Частные случаи: растяжение и сжатие



Частные случаи: чистый сдвиг



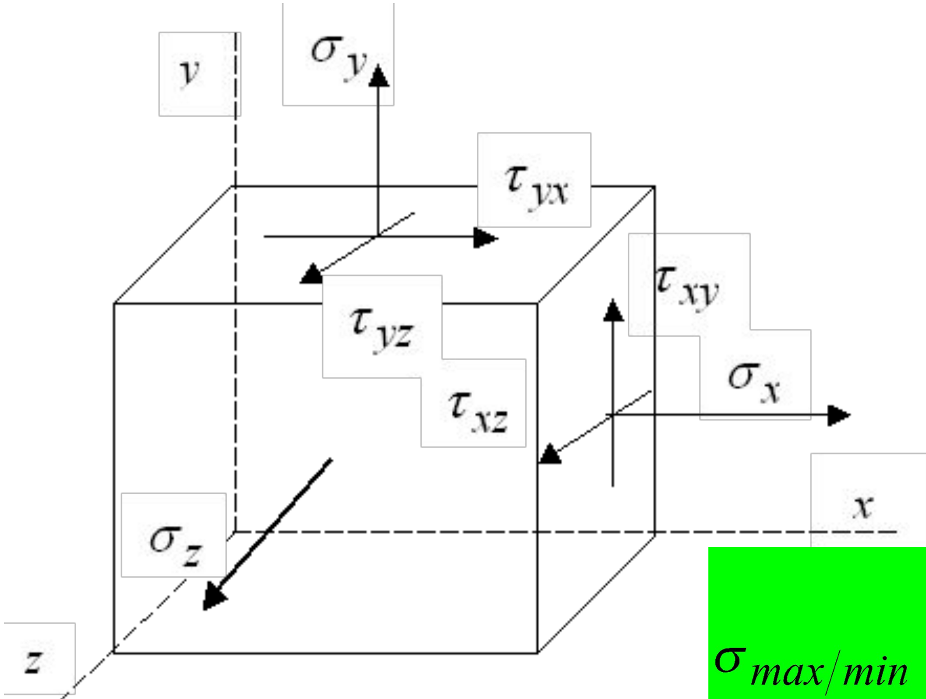
Чистый сдвиг



$$|\tau_{xy}| = |\sigma_1| = |\sigma_3|$$

Анализ трехосного напряженного состояния

- Рассмотрим частный случай трехосного НС



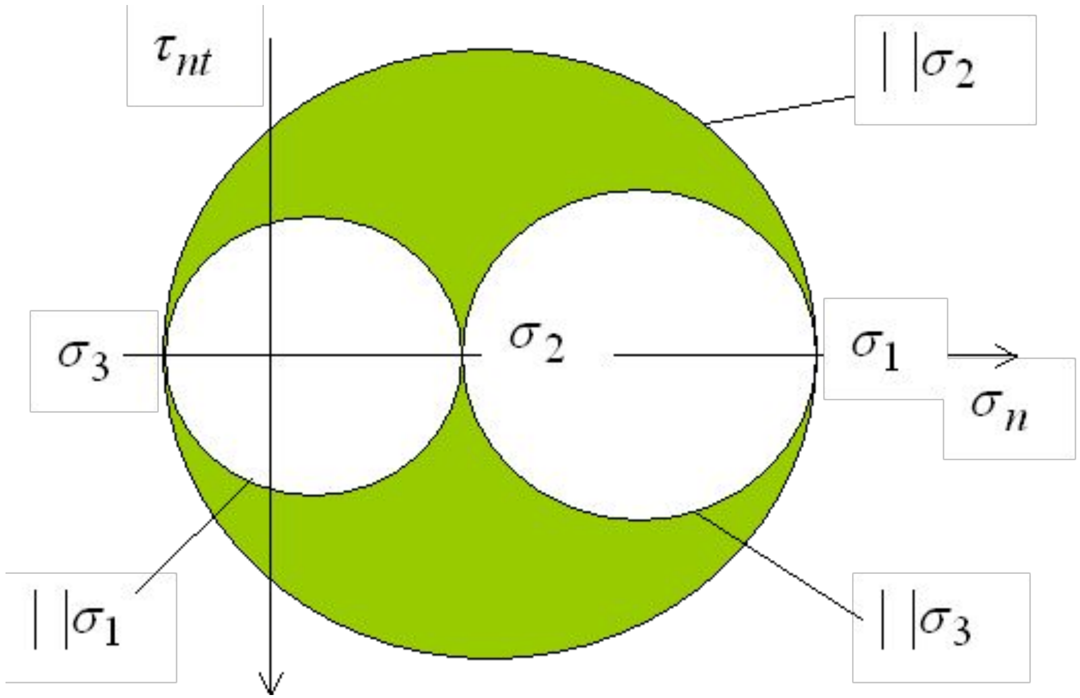
$$\sigma_{max/min} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_2 = min\, max\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

$$\sigma_3 = min\langle \sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_z \rangle$$

Круги Мора для трехосного НС



Поскольку главные напряжения – это экстремальные значения напряжений для данного напряженного состояния, то точки, соответствующие всем возможным описаниям данного напряженного состояния, лежат в закрашенной области, включая точки на всех трех окружностях