Лекция 3. Операторы координаты и импульса: уравнения на собственные значения, координатное и импульсное представления волновой функции

Найдем оператор координаты q q -

С одной стороны, согласно квантовомеханической формуле для средних

$$\overline{q} = \int \Psi^*(q)\hat{q}\Psi(q)dq$$

С другой, поскольку $\left|\Psi(q)\right|^2 dq$ есть вероятность того, что частица имеет координату в интервале dq

$$\overline{q} = \int q\left|\Psi(q)\right|^2 dq = \int \Psi^*(q)q\Psi(q)dq$$

Лекция 3 (2 слайд)

Поэтому $$\hat{q}\Psi(q) = q\Psi(q)$$

Найдем собственные функции этого оператора.

$$\hat{q}\Psi_{q_0}(q) = q_0 \cdot \Psi_{q_0}(q)$$

или

$$(q - q_0)\Psi_{q_0}(q) = 0$$

Отсюда

$$\begin{cases} \psi_{q_0}(q) = 0, \text{ при } q \neq q_0 \\ \psi_{q_0}(q) \neq 0, \text{ при } q = q_0 \end{cases}$$

Лекция 3 (3 слайд)

Таким образом, функция $\Psi_{q_0}(q) = \delta(q - q_0)$ - удовлетворяет уравнению на собственные значения, и для нее выполняется условие нормировки на δ - функцию:

$$\int \underbrace{\Psi^*_{q_0'}(q)}_{\delta(q-q_0')} \underbrace{\Psi_{q_0}(q)}_{\delta(q-q_0)} dq = \delta(q_0 - q_0')$$

Лекция 3 (4 слайд)

$$\hat{p}_a = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \vec{r}_a}$$

Рассмотрим свойства оператора импульса

$\hat{p}$ - эрмитов оператор, что следует из цепочки формул:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}_x \phi dx = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(x)dx = \frac{\hbar}{i}\psi^*(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\underbrace{\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{\hat{p}_x^*}\psi^*(x)dx$$

Лекция 3 (5 слайд)

Операторы $\hat{p}_x$ $\hat{p}_y$ $\hat{p}_x$ -

коммутируют друг с другом

$$\left[\hat{p}_i, \hat{p}_k\right] = 0$$

$\Rightarrow$ овременно и имеют полную

они измеримы одн

общую систему собственных функций.

Лекция 3 (6 слайд)

Найдем собственные функции. Пусть $\Psi(x, y, z)$ - общая собственная функция операторов $\hat{p}_x$ $\hat{p}_y$ $\hat{p}_x$

$$\begin{cases} \hat{p}_x\psi = p_x\psi \\ \hat{p}_y\psi = p_y\psi \\ \hat{p}_z\psi = p_z\psi \end{cases}$$

Лекция 3 (7 слайд)

Очевидно, этим уравнениям удовлетворяет функция

$$\Psi_{\vec{p}} = A \cdot e^{i \cdot \frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}},$$

где p_x, p_y, p_z могут быть любыми действительными (в силу эрмитовости оператора $\hat{p}$) числами. Если бы они были комплексными, ψ была бы неограничена (а мы ищем ограниченные решения).

Лекция 3 (8 слайд)

Разложение по собственным функциям оператора импульса

$$\Psi(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} a(\vec{p})\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} a(\vec{p}) e^{i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}$$

где $a(\vec{p})$ - «коэффициенты» разложения, представляющие собой функцию непрерывной переменной $\vec{p}$. Это разложение – это разложение в интеграл Фурье по гармоникам $e^{ik_x x}, e^{ik_y y}, e^{ik_z z}$.

Лекция 3 (9 слайд)

Квадрат функции $a(\hat{p})$ представляет собой плотность вероятности обнаружения различных значений импульса

$$dw(p) = |a(p)|^2 \, dp$$

Сравнивая эту формулу с определением волновой функции, аключаем, что функция $a(p)$

з также имеет смысл волновой

функции, но определяющей вероятности различных значений импульса. Она называется волновой функцией в импульсном представлении.

Лекция 3 (10 слайд)

Подведем итоги. Любое состояние частицы однозначно характеризуется как волновой функцией $\Psi(x)$, так и «коэффициентами» разложения $a(p)$ функции $\Psi(x)$ по собственным функциям оператора импульса $\Psi_p(x)$, причем согласно постулатам квантовой механики функция $a(p)$ которая определяет вероятности различных значений импульса и называется волновой функцией в импульсном представлении.