<u>Лекция 4.</u> Одновременная измеримость физических величин. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Исследуем вопрос о существовании общих собственных функций у разных операторов. Справедлива следующая Теорема: Для того чтобы два оператора $\hat{F}$ и $\hat{G}$ имели полную систему общих собственных функций необходимо и достаточно, чтобы они коммутировали:

$$\left[\hat{F}\hat{G}\right] = 0\,.$$

Лекция 4 (2 слайд)

Необходимость: Пусть $\Psi_{(f,g)}$ - полная система общих собственных функций. Тогда для любой Ψ:

$$\Psi = \sum_{f,g} C_{f,g} \Psi_{(f,g)}.$$

Подействуем на это равенство коммутатором

$$\left[\hat{F}\hat{G}\right]\Psi = \sum C_{f,g}(\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})\Psi_{(f,g)} = \sum C_{f,g}(fg - gf)\Psi_{(f,g)} = 0$$

где f и g собственные значения. Отсюда $\left[\hat{F}\hat{G}\right] = 0$.

Лекция 4 (3 слайд)

Достаточность: $\left[\hat{F}\hat{G}\right] = 0$. Подействуем на уравнение

$$\hat{F}\Psi_f = f\Psi_f$$

$\hat{G}$

оператором

$$\hat{G}\hat{F}\Psi_f = \hat{G}f\Psi_f$$

Благодаря коммутации имеем

$$\hat{F}\left(\hat{G}\Psi_f\right) = f\left(\hat{G}\Psi_f\right)$$

Лекция 4 (4 слайд)

Если у оператора $\hat{F}$ невырожденный спектр, то собственному значению f отвечает единственная собственная функция. Поэтому функция $\hat{G}\Psi_f$ может отличаться от Ψ_f некоторым множителем:

$$\hat{G}\Psi_f = g\Psi_f$$

Это и означает, что функция Ψ_f является собственной и для оператора $\hat{G}$.

Лекция 4 (5 слайд)

Если спектр оператора $\hat{F}$ вырожден, то есть одному собственному значению отвечают несколько собственных функций, функция $\hat{G}\Psi_f$, вообще говоря, не сводится к функции Ψ_f. В этом случае, однако, выбор собственных функций является неоднозначным и можно построить такие линейные комбинации собственных функций оператора $\hat{F}$, которые будут также и собственными для оператора $\hat{G}$. Теорема доказана

Лекция 4 (6 слайд)

Исходя из коммутатора оператора координаты и импульса

$$\left[\hat{p}\hat{x}\right] = -i\hbar$$

докажем, что

$$\sqrt{\overline{(\Delta p)^2}\cdot\overline{(\Delta x)^2}} \geq \frac{\hbar}{2}$$

т.е. неопределенности координаты и импульса не могут быть одновременно уменьшены до сколь угодно малых величин.

Лекция 4 (7 слайд)

Для доказательства рассмотрим произвольное состояние $\Psi(x)$.

Пусть в этом состоянии: $\bar{x} = 0$ и $\bar{p} = 0$ (этого всегда можно добиться выбором системы координат). Тогда:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2}$$

$$\overline{(\Delta p)^2} = \overline{(p - \bar{p})^2} = \overline{p^2}$$

Лекция 4 (8 слайд)

Рассмотрим функционал от действительной переменной ξ :

$$I(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| (\xi \hat{x} + \frac{i}{\hbar} \hat{p}) \psi(x) \right|^2 dx$$

Очевидно, что $I(\xi) \geq 0$, как интеграл от четной неотрицательной функции.

Лекция 4 (9 слайд)

С другой стороны

$$I(\xi) = \int \left((\xi \hat{x} - \frac{i}{\hbar} \hat{p}^*)\psi^*(x) \right)\left((\xi \hat{x} + \frac{i}{\hbar} \hat{p})\psi(x) \right) dx =$$

$$= \xi^2 \overline{x^2} - \frac{i}{\hbar}\xi \underbrace{\int \psi^*(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})\psi dx)}_{\overline{[\hat{p}\hat{x}]} = \frac{\hbar}{i}} + \frac{1}{\hbar^2}\overline{p^2} =$$

$$= \xi^2 - \xi + \frac{1}{\hbar^2}\overline{p^2} \geq 0, \forall \xi$$

Лекция 4 (10 слайд)

Чтобы неравенство выполнялось при любых ξ необходимо, чтобы $D \le 0$.

Получим:

$$1 - 4\overline{x^2} \cdot \overline{p^2} \frac{1}{\hbar^2} \le 0$$

Или

$$\sqrt{\overline{x^2} \cdot \overline{p^2}} \ge \frac{\hbar}{2}$$

Поскольку $\overline{x} = 0$ и $\overline{p} = 0$, то:

$$\sqrt{\overline{(\Delta p)^2} \cdot \overline{(\Delta x)^2}} \ge \frac{\hbar}{2}$$