Лекция 6. Интегрирование уравнения одномерного движения.

Одномерным называется движение системы с одной степенью свободы: $q_1 = q(t)$.

В общем виде функция Лагранжа выглядит так:

$$L(q;\dot{q};t) = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q;t)$$

Величина $a(q)$ - некоторая функция обобщенной координаты q. Уравнение Лагранжа и начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\{a(q)\dot{q}\} = -\dfrac{\partial U(q;t)}{\partial q}; \\ q(t=0) = q_0; \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0; \end{cases}$$

Лекция 6. (слайд 2)

В общем виде, при произвольной потенциальной энергии $U(q;t)$, зависящей как от координаты q, так и от времени t, уравнения Лагранжа аналитически не решаются. Ситуация упрощается, когда потенциальная энергия не зависит явно от времени

$$U = U(q)$$

В этом случае решение уравнения Л. легко находится в общем виде при произвольной зависимости $U(q)$, по крайней мере в квадратурах.

Лекция 6. (слайд 3)

Т.к. в этом случае $\partial L / \partial t = 0$, то $E = Const$, и для нахождения закона движения воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + U(q) = E$$

Отсюда находим, что

$$\dot{q}^2 = \frac{2[E - U(q)]}{a(q)}; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}}\sqrt{E - U(q)}\,.$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$dt = \pm\sqrt{\frac{a(q)}{2}}\frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}$$

Лекция 6. (слайд 4)

Его общее решение имеет вид:

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{a(q)}{E - U(q)}}\, dq + C$$

Если интеграл удастся вычислить аналитически, то мы получим зависимость $t = t(q; E, C)$,
т.е. закон движения в неявном виде. Если это уравнение удастся ещё и разрешить относительно обобщенной координаты q,
то мы получим закон движения частицы в явном виде: $q = q(t; E, C)$
и задача будет полностью завершена.

Лекция 6. (слайд 5)

Роль двух произвольных постоянных здесь играют полная энергия E и произвольная константа C. Если величина q есть обычная декартова координата $q(t) = x(t)$, то величина $a(q) = m$ - масса частицы. В этом случае все полученные выше формулы будут выглядеть так:

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + C$$

или:

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}$$

Лекция 6. (слайд 6)

Поскольку кинетическая энергия всегда положительная величина, то движение частицы может происходить только в тех областях пространства, где

$$E = T + U \geq U(x)$$

Неравенство определяют границы области движения частицы. Корни уравнения

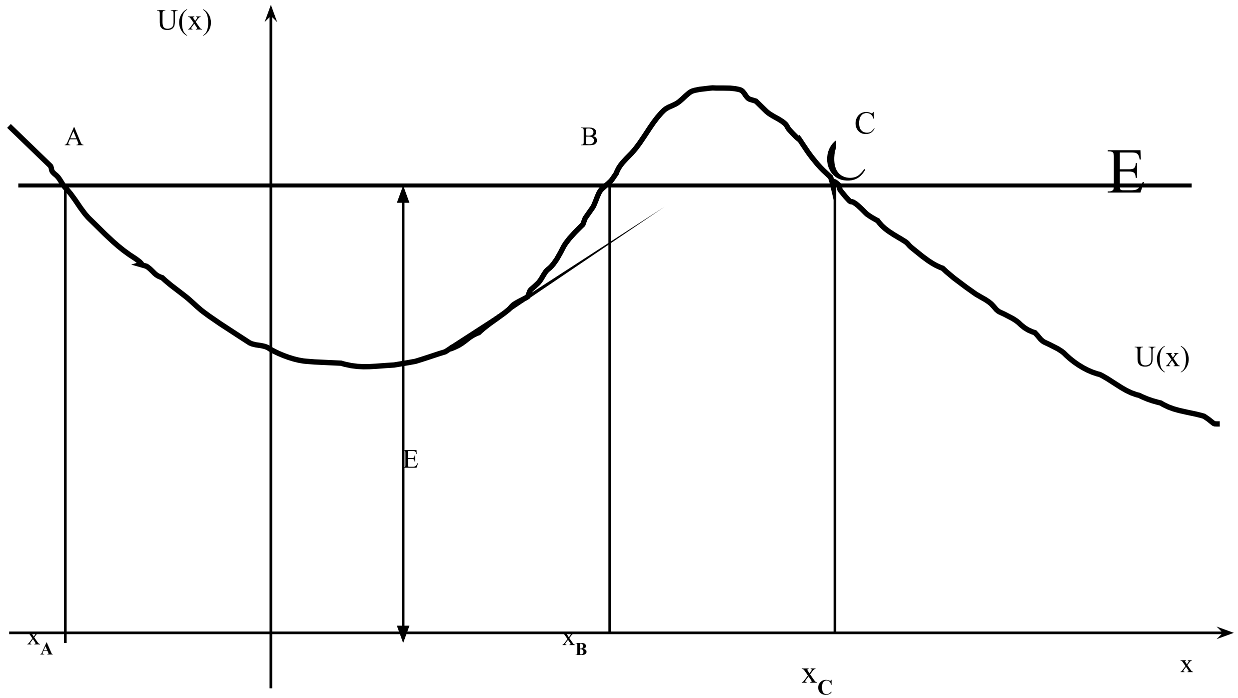
$$E = U(x)$$

определяют истинные точки остановки частицы. В этих точках $T = 0$ и, следовательно, $\dot{x} = v_x = 0$.

Лекция 6. (слайд 7)

Если область движения ограничена двумя точками остановки, то движение происходит между этими точками в ограниченной области пространства. Такое движение называется финитным движением. Если же область движения ограничена с одной стороны одной точкой остановки (или вообще не ограничена), то такое движение называется инфинитным.

Лекция 6. (слайд 8)



Лекция 6. (слайд 9)

Вычисление периода одномерных колебаний

Одномерное финитное движение всегда является колебательным. Частица совершает периодически повторяющиеся движения между двумя точками остановки x_A и x_B. При этом время движения от x_A к x_B и обратно, от x_B к x_A одно и тоже и равно половине периода колебаний. Выберем за начало отсчета времени тот момент, когда частица находилась в крайней левой точке x_A. Тогда

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

Координаты точек остановки x_A и x_B зависят от энергии E.

Лекция 6. (слайд 10)

Рассмотрим пример. Вычислим период гармонических колебаний тела m на пружине жесткостью κ, если задана энергия системы $E > 0$.

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E - \kappa x^2/2}} = 2\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1 - (\kappa/2E)x^2}}$$

Точки остановки $x_1 = -\sqrt{2E/\kappa}$ и $x_2 = \sqrt{2E/\kappa}$. Делая замену переменной интегрирования $y = \sqrt{\kappa/2E}\cdot x$, получаем

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\left\{\arcsin y\right\}_{-1}^{1},$$

Откуда: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\kappa}}$.