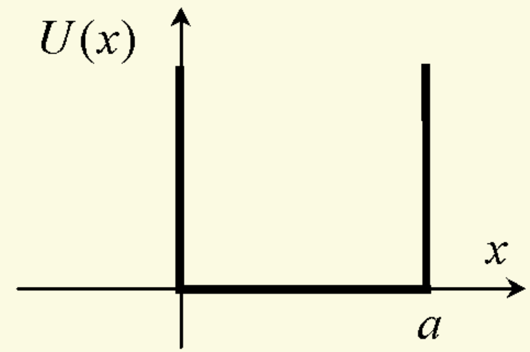
Лекция 8. Бесконечно глубокая прямоугольная потенциальная яма

Пусть потенциальная энергия частицы равна

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$



(

бесконечно глубокая потенциальная яма шириной

a, унок). Найдем собственные значения и

см. рис

ератора Гамильтона этой

собственные функции оп

частицы.

Лекция 8 (2 слайд)

Для нахождения волновых функций и энергий стационарных состояний необходимо решить уравнение

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} f(x) = 0$$

в области $0 < x < a$

с граничными условиями

$f(x=0)=0$ и $f(x=a)=0$.

Лекция 8 (3 слайд)

Общее решение уравнения Шредингера имеет вид

$$f(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Из граничного условия при $x = 0$ находим $C_1 = 0$. Из второго граничного условия получаем $C_2 \sin ka = 0$,

то есть либо $C_2 = 0$, либо

$$ka = \pi n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Лекция 8 (4 слайд)

Таким образом, ненулевые решения у.Ш., удовлетворяющие граничным условиям, существуют только при таких значениях E,

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

которые и являются собственными значениями оператора Гамильтона

Лекция 8 (5 слайд)

Собственной функцией, отвечающей собственному значению E_n,

является функция

$$f_n(x) = C\sin k_n x = C\sin\frac{\pi n x}{a}$$

где $k_n = \sqrt{\dfrac{2mE_n}{\hbar^2}} = \dfrac{\pi n}{a}$

Лекция 8 (6 слайд)

Если бы яма была расположена симметрично относительно начала координат, то волновые функции стационарных состояний обладали бы определенной четностью.

$$f_n(x) \sim \sin\frac{\pi n(x - a/2)}{a} = \sin\left(\frac{\pi n x}{a} - \frac{\pi n}{2}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$f_1(x) \sim \cos\frac{\pi x}{a}, \qquad f_2(x) \sim \sin\frac{2\pi x}{a},$$

$$f_3(x) \sim \cos\frac{3\pi x}{a}, \qquad f_4(x) \sim \sin\frac{4\pi x}{a}, \ldots$$

Лекция 8 (7 слайд)

Знание спектра собственных значений и собственных функций частицы в потенциальной яме позволяет согласно постулатам квантовой механики отвечать на вопросы о возможных значениях энергии частицы в тех или иных состояниях и их вероятностях. Рассмотрим пример.

Лекция 8 (8 слайд)

Пусть, например, частица в яме в момент времени $t = 0$ имеет волновую функцию

$$\Psi(x, t = 0) = A\cos\frac{5\pi x}{a}\sin\frac{8\pi x}{a}$$

Что можно сказать о результатах измерения энергии частицы в момент времени $t = t_0$? Какой будет средняя энергия частицы как функция времени?

Лекция 8 (9 слайд)

Согласно основным принципам квантовой механики нужно разложить волновую функцию частицы по собственным функциям оператора Гамильтона. Пользуясь известной тригонометрической формулой, получим

$$\Psi(x,t=0)=\frac{A}{2}\left(\sin\frac{13\pi x}{a}+\sin\frac{3\pi x}{a}\right)$$

Эта формула представляет собой разложение по собственным функциям оператора Гамильтона, в котором, таким образом, с равными весами представлены только третья и тринадцатая собственные функции;

Лекция 8 (10 слайд)

Это значит, что измерения энергии с равными вероятностями

$w = 1/2$

дадут третье и тринадцатое

$$E_3 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \qquad E_{13} = \frac{169\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

собственные значения. Отсюда легко найти среднюю энергию

$$\overline{E} = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{2} + \frac{169\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{2} = \frac{89\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$