<u>Лекция 18.</u> Спин 1/2. Матрицы Паули и их свойства. Разложение по спиновым функциям

Целый ряд элементарных частиц обладают спином $s = 1/2$. В этом случае проекция спина на ось z может принимать два значения $s_z = +1/2$ и $s_z = -1/2$, а потому спиновые волновые функции представляют собой двухкомпонентные спиноры

$$\psi(s_z) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

причем вероятности различных значений проекции спина на ось z равны

$$w(s_z = +1/2) = |C_1|^2 \qquad w(s_z = -1/2) = |C_2|^2$$

Лекция 18 (2 слайд)

Построим матрицы спиновых операторов в s_z-представлении. В этом представлении базисными функциями являются собственные функции оператора $\hat{s}_z$. Очевидно такими функциями являются следующие спиноры

$$e_1(s_z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad e_2(s_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Действительно, в состоянии $e_1(s_z)$ проекция спина на ось z принимает единственное значение $s_z = 1/2$, и, следовательно, эта функция – собственная для оператора $\hat{s}_z$, отвечающая собственному значению +1/2. Аналогично, функция $e_2(s_z)$ - собственная функция оператора $\hat{s}_z$, отвечающая собственному значению -1/2.

Лекция 18 (3 слайд)

Начнем с построения матрицы оператора $\hat{s}_z$. Для этой матрицы выполнены следующие условия

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда находим

$$\hat{s}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Лекция 18 (4 слайд)

Для построения матриц операторов $\hat{s}_x$ и $\hat{s}_y$ найдем сначала матрицы операторов $\hat{s}_\pm = \hat{s}_x \pm i\hat{s}_y$. При действии операторов $\hat{s}_+$ ($\hat{s}_-$) на собственную функцию, отвечающую максимальному (минимальному) собственному значению получается спиновая функция, тождественно равная нулю, то есть нулевой столбец. Поэтому

$$\hat{s}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{s}_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$\hat{s}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{s}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

А затем находим

$$\hat{s}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{s}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Лекция 18 (5 слайд)

Матрицу оператора $\hat{s}^2$ легко найти, возводя в квадрат и складывая матрицы операторов проекций спина

$$\hat{s}^2 = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эту матрицу можно было бы получить и по-другому из следующих рассуждений. Поскольку любой двумерный столбец является собственной функцией оператора $\hat{s}^2$, отвечающей собственному значению $1/2\left((1/2)+1\right) = 3/4$, то матрица оператора $\hat{s}^2$ является диагональной, причем диагональные матричные элементы равны $3/4$.

Лекция 18 (6 слайд)

Матрицы операторов $\hat{s}_x$, $\hat{s}_y$ и $\hat{s}_z$ (без множителей 1/2) называются матрицами Паули и обозначаются σ_x, σ_y и σ_z. Рассмотрим их свойства.

А. Все матрицы Паули эрмитовы.

Б. Для всех матриц Паули выполнено условие $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$, где 1 – единичная матрица.

В. $\sigma_i \sigma_k = \delta_{ik} + i\varepsilon_{ikl}\sigma_l$

Г. Любая матрица (2×2) может быть представлена в виде: $U(2\times 2) = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma}$.

Д. $\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik}$. В частности, $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$, т.е. они антикоммутируют. Алгебра (так называют правила умножения матриц) очень простая - при перестановке матриц просто меняется знак их произведения.

Е. Для матриц Паули выполнены обычные коммутационные соотношения для операторов проекций момента на координатные оси

$$[\sigma_i \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l$$

Лекция 18 (7 слайд)

Рассмотрим теперь такой вопрос. Пусть частица находится в состоянии

$$\psi\left(s_z\right)=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Какие значения может принимать в этом состоянии проекция спина на ось x и с какими вероятностями? Для ответа на этот вопрос необходимо найти собственные функции оператора $\hat{s}_x$ и разложить по ним функцию.

Лекция 18 (8 слайд)

Решаем уравнение

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\frac{1}{2} a_2 = \lambda a_1$$

$$\frac{1}{2} a_1 = \lambda a_2$$

Система однородных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения

в том случае, когда определитель этой системы равен нулю

Лекция 18 (9 слайд)

Отсюда находим возможные значения проекций спина на ось x:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

Подставляя теперь собственные значения в систему уравнений (12), находим

собственные функции

$$\psi_1(s_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \psi_2(s_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

(

множители возникли из условия нормировки)

Лекция 18 (10 слайд)

Разложим теперь данную функцию по собственным функциям (15).

Это разложение имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{C_1 + C_2}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{2}}\psi_2$$

Отсюда согласно постулатам квантовой механики находим

вероятности различных значений проекции спина на ось x в состоянии (10):

$$w\left(s_x = +1/2\right) = \frac{\left|C_1 + C_2\right|^2}{2} \qquad w\left(s_x = -1/2\right) = \frac{\left|C_1 - C_2\right|^2}{2}$$