<u>Лекция 19.</u> Собственный магнитный момент. Уравнение Паули. Уровни Ландау

Многие элементарные частицы имеют магнитный момент, не связанный

с ее движением в пространстве, а связанный с внутренними степенями свободы.

Природа этой величины такая же, как и природа спинового момента, поэтому

оператор магнитного момента пропорционален оператору спина:

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{s}\hat{s}$$

где s - спин частицы. Отсюда получаем, что максимальное собственное значение

оператора проекции магнитного момента равно:

максимальное с.зн. $\hat{\mu}_z = \frac{\mu}{s}\sigma\Big|_{max} = \mu$

Лекция 19 (2 слайд)

Эта величина и есть магнитный момент частицы. Вектор магнитного момен направлен по или против собственного механического момента (спина). Напри для электрона, $\mu = -\frac{|e|\hbar}{2m_e c}$, где m_e - масса электрона, e - элементарный заряд.

Величину $\mu_Б = \frac{|e|\hbar}{2m_e c}$ называют магнетоном Бора.

Для нейтрона: $\mu_n = -1,91\mu_я$, где $\mu_я = \frac{|e|\hbar}{2m_p c}$ - ядерный магнетон. Он приблизительно в 2000 раз меньше магнетона Бора $\mu_Б$.

Знак минуса у магнитного момента нейтрона показывает, что спин нейтрона направлен против его спина. Для протона: $\mu_p = 2,79\mu_я$.

Лекция 19 (3 слайд)

Рассмотрим заряженную частицу во внешнем электромагнитном поле.

Пусть частицы со спином находится в электромагнитном поле, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - напряженности электрического и магнитного поля. $\vec{A}, \varphi$ - векторный и скалярный потенциалы этого поля.

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \\ \vec{H} = rot(\vec{A}) \end{cases}$$

Имеем:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi - \vec{\mu}\vec{H}$$

Уравнение Шредингера с таким гамильтонианом называется *уравнением Паули*.

Лекция 19 (4 слайд)

Градиентное преобразование

Напомним, что градиентным преобразованием в электродинамике

ование потенциалов

называется преобраз

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f;$$

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

которое не меняет напряженности полей. Посмотрим, как изменяется

решение уравнение Паули при градиентном преобразовании потенциалов.

Лекция 19 (5 слайд)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением нового уравнение Шредингера (после градиентного преобразования) будет следующая функция:

$$\Psi' = \exp\left(i\frac{ef(\vec{r},t)}{\hbar c}\right)\Psi$$

А поскольку функция $f(\vec{r},t)$ действительна, никакие вероятности и средние в результате градиентного преобразования не изменяются. Такое свойство уравнения Шредингера называется градиентной или калибровочной инвариантностью.

Лекция 19 (6 слайд)

Рассмотрим задачу об электроне в постоянном магнитном поле.

Векторный потенциал можно выбрать в виде

$$\vec{A} = \{A_x = -\mathrm{H}y, A_y = 0, A_z = 0\}$$

Скалярный потенциал возьмем равным нулю.

Уравнение Шредингера для бесспиновой заряженной частицы в таком поле

имеет вид:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi - \frac{i\hbar e}{\mu c}\mathrm{H}y\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{e^2}{2\mu c^2}\mathrm{H}^2 y^2\psi = E\psi$$

где ψ E -

Лекция 19 (7 слайд)

Ищем решение в виде

$$\psi(x,y,z)=e^{i(\alpha x+\beta z)}f(y)$$

где α β -
и некоторые постоянные. Подставляя функцию в уравнение,
получим следующее уравнение для функции $f(y)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 f(y)}{dy^2}+\frac{e\hbar\alpha \mathrm{H}}{\mu c}yf(y)+\frac{e^2\mathrm{H}^2}{2\mu c^2}y^2 f(y)=\left(E-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2\mu}-\frac{\hbar^2\beta^2}{2\mu}\right)f(y)$$

Уравнение (11) легко сводится к уравнению Шредингера для одномерного

сциллятора. Для этого введем следующие обозначения
гармонического о

$$y=y'-\frac{\hbar\alpha c}{e\mathrm{H}}\qquad \omega_0=\frac{e\mathrm{H}}{\mu c}\qquad \varepsilon=E-\frac{\hbar^2\beta^2}{2\mu}$$

Лекция 19 (8 слайд)

В результате после элементарных преобразований получим новое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2 f(y')}{dy'^2}+\frac{\mu\omega_0^2 y'^2}{2}f(y')=\varepsilon f(y')$$

а это и есть уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора

с массой μ и частотой ω_0. Поэтому можно сразу написать решения

$$f_n(y)=A_n H_n(\xi)\exp(-\xi^2/2) \qquad \varepsilon_n=\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

здесь

$$\xi=\sqrt{\frac{\mu\omega_0}{\hbar}}y'=\sqrt{\frac{\mu\omega_0}{\hbar}}\left(y+\frac{\hbar\alpha c}{e\mathrm{H}}\right)$$

Отсюда находим энергии и волновые функции состояний частицы в магнитном

поле, направленном вдоль оси z:

Лекция 19 (9 слайд)

$$E_n = \frac{\hbar^2\beta^2}{2\mu} + \frac{e\hbar H}{\mu c}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\psi_{\alpha\beta n}(x,y,z) = A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} e^{i(\alpha x+\beta z)}$$

Отсюда следует, что движение частицы разделилось на равномерное движение вдоль оси z и вращение в плоскости (x, y). При этом то обстоятельство, что гармоническое движение происходит как будто бы только по оси y, в то время как классическое круговое движение в плоскости (x, y) представляет собой колебания и по оси y и по оси x, связано с тем, что волновая функция $\psi_{\alpha\beta n}(x,y,z)$ описывает состояние с неопределенным положением равновесия для колебания вдоль оси x.

Лекция 19 (10 слайд)

Той же энергии отвечают любые состояния вида

$$\psi_{\beta n}(x,y,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha C(\alpha) A_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} e^{i(\alpha x+\beta z)}$$

где $C(\alpha)$ - произвольная функция α. Функцию $C(\alpha)$ можно подобрать так, что решение будет отвечать определенному положению равновесия для колебания вдоль оси x, и неопределенному вдоль оси y.

Рассмотренные решения задачи о движении заряженной частицы в магнитном поле принято называть «уровнями Ландау».