Лекция 20. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордана

Квантовомеханический оператор суммарного момента двух частиц определяется как

$$\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{p}_1$ - операторы координаты и импульса первой частицы, $\vec{r}_2$ и $\vec{p}_2$ - операторы координаты и импульса второй частицы. При этом операторы момента первой и второй частицы коммутируют друг с другом. Кроме того, можно проверить, что для операторов проекций суммарного момента справедливы те же коммутационные соотношения, что и для оператора момента импульса одной частицы:

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hat{J}_z$$

Лекция 20 (2 слайд)

То есть операторы квадрата суммарного момента и его проекции на любую ось коммутируют. Это, в частности, означает, что операторы $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$ имеют, а операторы различных проекций суммарного момента импульса общих собственных функций не имеют. Собственными значениями оператора $\hat{J}^2$ могут являться только числа $J(J+1)$, где J - целое или полуцелое неотрицательное число. Собственными значениями оператора $\hat{J}_z$ могут являться положительные и отрицательные целые числа.

Лекция 20 (3 слайд)

Найдем собственные значения и собственные функции операторов

$\hat{J}^2$ $\hat{J}_z$. $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_{1z}$,

и Стартуем с общих собственных функций операторов

$\hat{J}^2$ $\hat{L}_2^2$, $\hat{L}_{2z}$. ируют, у них существуют

Поскольку эти операторы коммут

$\hat{J}^2$

общие собственные функции

$$\Psi_{l_1 m_1 l_2 m_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\vartheta_2, \varphi_2)$$

Эти функции, вообще говоря, не будут собственными функциями оператора

$\hat{J}^2$, $\hat{J}^2$ $\hat{L}_{1z}$ $\hat{L}_{2z}$.

поскольку оператор не коммутирует с операторами и Из этого

утверждения следует, что в тех состояниях, в которых проекции моментов

рный момент определенного

частиц имеют определенные значения, сумма

значения, вообще говоря, не имеет (и наоборот)

Лекция 20 (4 слайд)

Оператор квадрата суммарного момента и его проекция коммутируют

ицы

с операторами квадрата момента каждой част

$$\left[\hat{J}^2,\hat{L}_1^2\right]=\left[\hat{J}^2,\hat{L}_2^2\right]=\left[\hat{J}_z,\hat{L}_1^2\right]=\left[\hat{J}_z,\hat{L}_2^2\right]=0$$

Поэтому четыре оператора $\hat{J}^2,\quad \hat{J}_z,\quad \hat{L}_1^2,\quad \hat{L}_2^2$

имеют полную систему

собственных функций. Обозначим эти функции как

$$\Phi_{JMl_1l_2}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2)$$

где квантовые числа – собственные значения указанных выше операторов.

Лекция 20 (5 слайд)

Поскольку обе системы функций $\Psi_{l_1 m_1 l_2 m_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$ и $\Phi_{JMl_1 l_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$ (для всех возможных значений индексов) являются полными, то любую из этих функций можно разложить в ряд по системе других функций. В частности

$$\Psi_{l_1 m_1 l_2 m_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{JM} C^{JM}_{l_1 m_1 l_2 m_2} \Phi_{JMl_1 l_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$$

Коэффициенты разложения $C^{JM}_{l_1 m_1 l_2 m_2}$ называются коэффициентами Клебша-Гордана.

Лекция 20 (6 слайд)

Коэффициенты Клебша-Гордана можно выразить через скалярные произведения

кций Ψ Φ . $\Phi^{*}_{J'M'l_1l_2}$, по
фун и Умножая разложение на функцию интегрируя
координатам первой и второй частиц, получим

$$C^{JM}_{l_1m_1l_2m_2} = \left(\Phi_{JMl_1l_2} , \Psi_{l_1m_1l_2m_2} \right)$$

Отсюда сразу следует, что и обратное разложение - функции Φ
по системе
функций Ψ -
определяется теми же самыми коэффициентами Клебша-Гордана.

Лекция 20 (7 слайд)

Действительно, умножая обратное разложение

$$\Phi_{JMl_1l_2}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2)=\sum_{m_1m_2} B^{JM}_{l_1m_1l_2m_2}\Psi_{l_1m_1l_2m_2}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2)$$

на функцию $\Psi^{*}_{l_1m_1'l_2m_2'}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2)$ и интегрируя, получим

$$B^{JM}_{l_1m_1l_2m_2}=\left(\Psi_{l_1m_1l_2m_2},\Phi_{JMl_1l_2}\right)$$

Поэтому и разложение Φ по Ψ, и разложение Ψ по Φ определяются одними

и теми же коэффициентами Клебша-Гордана

Лекция 20 (8 слайд)

Установим теперь, какие значения могут принимать суммарный момент J и его проекция M в состоянии с определенными значениями квантовых чисел l_1, m_1, l_2, m_2. Для проекций момента благодаря линейной связи

$$\hat{J}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$$

ответ очевиден

$$M = m_1 + m_2$$

Возможные значения квантового числа J можно установить из следующих соображений. При фиксированных квантовых числах l_1 и l_2 полное количество Ψ состояний равно $(2l_1+1)(2l_2+1)$. Поэтому квантовые числа J и M могут принимать $(2l_1+1)(2l_2+1)$ пар значений. При этом для каждого возможного фиксированного J число M должно пробегать все значения, входящие в мультиплет $J, (J-1), (J-2), \ldots, -(J-1), -J$.

Лекция 20 (9 слайд)

Используем эти обстоятельства для подсчета числа состояний (при фиксированных

l_1 и l_2). Максимальные значения m_1 и m_2, а, следовательно, и M равны

$$m_{1,\max} = l_1 \qquad m_{2,\max} = l_2 \qquad M_{\max} = l_1 + l_2$$

А значит, и максимальное значение J равно

$$J_{\max} = l_1 + l_2$$

Далее, есть два состояния, с $M = l_1 + l_2 - 1$ (при $m_1 = l_1, m_2 = l_2 - 1$ и $m_1 = l_1 - 1, m_2 = l_2$).

Ф

Поэтому должно быть и два состояния с такой проекцией. Но

остояний с $J_{\max} = l_1 + l_2$.

одно из них входит в мультиплет с Поэтому второе входит

$$J = l_1 + l_2 - 1.$$

в мультиплет состояний с

Лекция 20 (10 слайд)

Итак, мы доказали, что при фиксированных квантовых числах l_1 и l_2, и всех

возможных проекциях, суммарный момент принимает значения
от значения $J_{\max} = l_1 + l_2$ до значения $J_{\min} = | l_1 - l_2 |$ через единицу

при этом для каждого J проекция M может принимать все возможные значения.

Этот результат имеет наглядное толкование. В квантовой механике не существует состояний, в которых был бы определен вектор момента. Поэтому

при сложении складываются состояния с фиксированной длиной вектора момента,

оэтому можно получить значение
но с неопределенным направлением. П
$J_{\max} = l_1 + l_2$, ллельны, и любые
момента если векторы моментов частиц пара
значения

$J_{\min} = | l_1 - l_2 |$ оры антипараллельны.
до значения в случае, если вект