<u>Лекция 21.</u> Сложение двух спинов ½

Согласно теореме Клебша-Гордана возможные значения суммарного момента системы из двух частиц в состоянии с определенными значениями моментов каждой частицы l_1 и l_2 суммарный момент не может принимать никакие другие значения, кроме: $|l_1 - l_2|$, $|l_1 - l_2 + 1|$,

$\ldots,\ l_1 + l_2$.

Это означает, что в разложении функции

$$\Psi_{l_1 m_1 l_2 m_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = Y_{l_1 m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_2 m_2}(\vartheta_2, \varphi_2)$$

по собственным функциям операторов $\hat{J}^2$, $\hat{J}_z$, $\hat{L}_1^2$, $\hat{L}_2^2$ не могут присутствовать никакие другие слагаемые, кроме слагаемых с перечисленными значениями J.

Лекция 21 (2 слайд)

Итак, рассмотрим данное в условии состояние

$$\Psi_{l_1=7 m_1=7 l_1=3 m_1=3}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2) = Y_{l_1=7 m_1=7}(\vartheta_1,\varphi_1) Y_{l_1=3 m_1=3}(\vartheta_2,\varphi_2)$$

В этом состоянии суммарный момент не может принимать никакие другие

значения, кроме 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, а проекция суммарного момента принимает

значение 10. А поскольку проекция не может быть меньше момента, то для суммарного момента остается единственная возможность $J = 10$.

Отсюда следует,

что

$$\Phi_{J=10 M=10 l_1=7 l_2=3}(\vartheta_1,\varphi_1,\vartheta_2,\varphi_2) = Y_{l_1=7 m_1=7}(\vartheta_1,\varphi_1) Y_{l_1=3 m_1=3}(\vartheta_2,\varphi_2)$$

Следовательно, один из коэффициентов Клебша-Гордана мы нашли

$$C^{J=10 M=10}_{l_1=7 m_1=7 l_2=3 m_2=3} = 1$$

Лекция 21 (3 слайд)

Рассмотрим теперь случай, когда одна из проекций на единицу меньше максимальной. Например, пусть система двух частиц находится в состоянии, в котором моменты импульса первой и второй частицы и их проекции на ось z имеют определенные значения $l_1 = 4$, $m_1 = 3$, $l_2 = 1$, $m_2 = 1$.

Какие значения может принимать в этом состоянии квадрат суммарного момента? Разложим волновую функцию рассматриваемого состояния

$$\Psi_{l_1=4 m_1=3 l_1=1 m_1=1}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = Y_{l_1=4 m_1=3}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_1=1 m_1=1}(\vartheta_2, \varphi_2)$$

по функциям $\Phi_{JMl_1l_2}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$:

$$\Psi_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2) = \sum_J C^{JM=4}_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} \Phi_{JM=4 l_1=4 l_2=3}(\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2)$$

Лекция 21 (4 слайд)

Очевидно, в сумме присутствуют только два слагаемых с $J = l_1 + l_2 = 5$ и с $J = l_1 + l_2 - 1 = 4$.

То есть

$$\Psi_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} = C^{J=4 M=4}_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} \Phi_{J=4 M=4 l_1=4 l_2=3} + C^{J=5 M=4}_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} \Phi_{J=5 M=4 l_1=4 l_2=3}$$

Таким образом, при измерении суммарного момента можно обнаружить два значения $J = 4$ или $J = 5$, причем вероятности этих значений суммарного момента J определяются квадратами коэффициентов Клебша-Гордана

$$w(J=4) = \left| C^{J=4 M=4}_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} \right|^2 \qquad w(J=5) = \left| C^{J=5 M=4}_{l_1=4 m_1=3 l_2=1 m_2=1} \right|^2$$

Лекция 21 (5 слайд)

Для вычисления коэффициентов Клебша-Гордана можно воспользоваться

следующим приемом. Рассмотрим собственную функцию операторов $\hat{L}_1^2,\ \hat{L}_{1z},\ \hat{L}_2^2,\ \hat{L}_{2z}$, отвечающую квантовым числам $l_1 = 4,\ m_1 = 4,\ l_2 = 1,\ m_2 = 1$.

Поскольку эта функция отвечает максимальным проекциям моментов отдельных частиц, она является и собственной функцией операторов $\hat{J}^2,\quad \hat{J}_z,\quad \hat{L}_1^2,\quad \hat{L}_2^2$

$$\Psi_{l_1=4m_1=43l_1=1m_1=1} = Y_{l_1=4m_1=3}Y_{l_1=1m_1=1} = \Phi_{J=5M=5l_1=4l_2=1}$$

Подействуем на правую и левую часть равенства оператором $\hat{J}_-$. В результате

Получим в левой части

$$\hat{J}_-\Psi_{l_1=4m_1=4l_1=1m_1=1} = \left(\hat{L}_{1-} + \hat{L}_{2-}\right)\Psi_{l_1=4m_1=4l_1=1m_1=1} = \sqrt{8}\Psi_{l_1=4m_1=3l_1=1m_1=1} + \sqrt{2}\Psi_{l_1=4m_1=4l_1=1m_1=0}$$

Лекция 21 (6 слайд)

Аналогично найдем результат действия оператора $\hat{J}_-$ на правую часть

$$\hat{J}_- \Phi_{J=5M=5l_1=4l_2=1} = \sqrt{10}\,\Phi_{J=5M=4l_1=4l_2=1}$$

Находим

$$\Phi_{J=5M=4l_1=4l_2=1} = \sqrt{\frac{4}{5}}\Psi_{l_1=4m_1=3l_1=1m_1=1} + \sqrt{\frac{1}{5}}\Psi_{l_1=4m_1=4l_1=1m_1=0}$$

Поскольку и разложение функций Ψ по функциям Φ, и разложение Ψ по Φ определяются коэффициентами Клебша-Гордана, заключаем, что

$$C^{J=5M=4}_{l_1=4m_1=3l_2=1m_2=1} = \sqrt{\frac{4}{5}} \qquad C^{J=5M=4}_{l_1=4m_1=4l_2=1m_2=0} = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Лекция 21 (7 слайд)

Таким образом, один из коэффициентов Клебша-Гордана мы нашли. Чтобы найти другой, заметим, что разложение функции $\Phi_{J=4M=4l_1=4l_2=1}$ по функциям Ψ содержит те же слагаемые, что и разложение функции $\Phi_{J=5M=4l_1=4l_2=1}$. Имеем

из ортогональности

$$\Phi_{J=4M=4l_1=4l_2=1} = \sqrt{\frac{1}{5}}\Psi_{l_1=4m_1=3l_1=1m_1=1} - \sqrt{\frac{4}{5}}\Psi_{l_1=4m_1=4l_1=1m_1=0}$$

Поэтому

$$C^{J=4M=4}_{l_1=4m_1=3l_2=1m_2=1} = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad C^{J=4M=4}_{l_1=4m_1=4l_2=1m_2=0} = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$

Лекция 21 (8 слайд)

Такая же техника применяется для построения спиновых функций

системы двух частиц. Пусть, например, имеются две частицы со

спином ½ остояний системы, в

которых суммарный спиновый момент имеет определенное значение.

каждая. Построим волновые функции с

Очевидно, что состояния

$$\psi_{S=1,S_z=1}(s_{z1}, s_{z2}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 \quad \text{и} \quad (\;,\;) \qquad \psi_{S=1,S_z=-1}\; s_{z1}\;\; s_{z2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$$

отвечают суммарному спину $S=1$ и проекциям суммарного спина $S_z=+1$ в первом состоянии и $S_z=-1$ - во втором

Лекция 21 (9 слайд)

Подействуем на первое из состояний оператором $\hat{S}_{-} = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}$. В результате

получим

$$\hat{S}_{-}\psi_{S=1,S_z=1}(s_{z1}, s_{z2}) = \sqrt{2}\psi_{S=1,S_z=0}(s_{z1}, s_{z2})$$

С другой стороны, тот же результат можно получить, действуя операторами $\hat{s}_{1-}$ и $\hat{s}_{2-}$ на спин овые функции каждой частицы

$$\left(\hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2$$

Отсюда получаем волновую функцию состояния с суммарным спином, равным 1, а проекцией, равной 0:

$$\psi_{S=1,S_z=0}(s_{z1}, s_{z2}) = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right\}$$

Лекция 21 (10 слайд)

Теперь из условия ортогональности строим волновую функцию состояния с суммарным спином, равным 0:

$$\psi_{S=0,S_z=0}(s_{z1},s_{z2})=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_2-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_2\right\}$$

Построенные функции являются базисной системой функций в пространстве спиновых состояний системы из двух частиц со спином ½ каждая, причем все эти функции отвечают определенному суммарному спину, и всем возможным значениями его проекции на ось z .