Лекция 22. Квазиклассическое приближение.

Если потенциальная энергия частицы $U(x)=\text{const}$,

уравнение Шредингера

$$\psi''(x)+k^2(x)\psi(x)=0$$

где символом $k^2(x)$

обозначена величина

$$k^2(x)=\frac{2m\big(E-U(x)\big)}{\hbar^2}$$

легко решается. Его общее решение имеет вид

$$C_1e^{ikx}+C_2e^{-ikx}$$ если $k^2>0$, или

$$C_1e^{|k|x}+C_2e^{-|k|x}$$ если $k^2<0$.

Лекция 22 (2 слайд)

Очевидно, что если величина $k^2(x)$ зависит от координаты, но является «плавной» функцией координаты, решения должны быть «похожи» на эти функции и в предельном случае $k(x) \to \mathrm{const}$ переходить в них. Такими функциями будут функции вида

$$\psi(x) = C_1 \exp\left(i\int_a^x k(t)dt \right) + C_2 \exp\left(-i\int_a^x k(t)dt \right)$$

если $k^2(x) > 0$, или

$$\psi(x) = C_1 \exp\left(\int_a^x |k(t)|\,dt \right) + C_2 \exp\left(-\int_a^x |k(t)|\,dt \right)$$

если $k^2(x) < 0$

Лекция 22 (3 слайд)

Можно проверить, что малым параметром, определяющим точность решений является безразмерная величина

$$\left|\frac{k'(x)}{k^2(x)}\right|$$

которая называется параметром квазиклассичности. Решения работают при выполнении условия

$$\left|\frac{k'(x)}{k^2(x)}\right| \ll 1$$

Лекция 22 (4 слайд)

Можно получить и поправки к решениям по параметру квазиклассичности.

В частности, учет первой поправки приводит к следующим приближенным решениям уравнения

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{k(x)}}\exp\left(i\int_a^x k(t)dt\right) + \frac{C_2}{\sqrt{k(x)}}\exp\left(-i\int_a^x k(t)dt\right),$$ если $k^2(x) > 0$

$$\psi(x) = \frac{C_1}{\sqrt{|k(x)|}}\exp\left(\int_a^x |k(t)|dt\right) + \frac{C_2}{\sqrt{|k(x)|}}\exp\left(-\int_a^x |k(t)|dt\right)$$ если $k^2(x) < 0$

Лекция 22 (5 слайд)

Функции являются хорошими приближениями для решений при любой фиксированной энергии E, если параметр квазиклассичности мал. Следует, однако, иметь в виду, что параметр квазиклассичности зависит от координаты, и потому возможны ситуации, когда при некоторых значениях координаты квазиклассические функции являются хорошими приближениями для истинных решений уравнения Шредингера, при некоторых - нет.

Лекция 22 (6 слайд)

В частности очевидно, что квазиклассика не работает в окрестности

$$k(x) = 0\,, \qquad E = U(x)\,.$$

таких точек, где или Для классического движения эти точки являются точками остановки. Поэтому решения в классически

запрещенной и классически доступной областях (границей между которыми

и является точка остановки) нельзя «сшивать» в точке остановки, используя сами функции. Другими словами, для согласованного выбора

коэффициентов

в функциях (9), (10), которые являются хорошими приближениями для истинных решений в разных областях квазиклассичности вдали от точек

остановки, нельзя использовать квазиклассические функции в точках

остановки. Существует два способа «сшивки» квазиклассических функций.

Лекция 22 (7 слайд)

Первый способ. В окрестности точки поворота линеаризуем функцию $U(x)$.

$$U(x) = U(x_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_b (x - b_0) = E - F(x - b)$$

Подставим в уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - F(x-b)\psi = 0$$

Получили уравнение Эйри. Решение этого уравнения известно. Поэтому используя это решение можно «сшить» квазиклассические функции слева и справа от классической точки поворота

Лекция 22 (8 слайд)

Второй способ. Предположим, что $U(x)$ - аналитическая функция действительного аргумента x. Тогда можно рассмотреть квазиклассические функции в комплексной плоскости, и связать квазиклассические решения обходя точку поворота в комплексной плоскости.

Лекция 22 (9 слайд)

Для «левой» точки поворота $x = a$ имеем:

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{2\sqrt{|k(x)|}} e^{-\int_x^a k(x)\,dx}, & x < a; \\ \dfrac{C}{\sqrt{k(x)}} \sin\left(\int_a^x p(x)dx + \dfrac{\pi}{4}\right), & x > a. \end{cases}$$

Аналогичное условие можно получить в правой точке поворота.

Лекция 22 (10 слайд)

Квазиклассические решения и условия их «сшивки» в точках поворота позволяют получить «в квадратурах» (то есть через интегралы, а не через решение дифференциального уравнения) условие на уровни энергии. Такие условия называются правилами квантования. Мы рассмотрим их на следующей лекции.