

## Лекция 28. Теория стационарных возмущений в случае вырожденного спектра. Примеры

Пусть трехмерная частица находится в сферически симметричном потенциале, в котором отсутствует «случайное» вырождение уровней энергии. На эту систему накладывается слабое однородное электрическое поле с напряженностью  $E$ . В первом порядке теории возмущений расщепления энергетических уровней частицы не происходит. Стационарные состояния частицы в центрально-симметричном поле можно

классифицировать с помощью трех квантовых чисел: радиального  $n_r$ , момента  $l$  и его проекции  $m$ . Стационарные состояния частицы в центрально-симметричном поле можно классифицировать с помощью трех квантовых чисел: радиального  $n_r$ , момента  $l$  и его проекции  $m$ . При этом уровень энергии частицы с  $2l+1$ -

кратно вырожденным по проекции момента. То есть собственные значения оператора Гамильтона, отвечающие собственным состояниям с одинаковыми  $n_r$ ,  $l$ ,  $m$  совпадают. То есть собственные значения оператора Гамильтона, отвечающие собственным состояниям с одинаковыми  $n_r$ ,  $l$ ,  $m$  совпадают.

## Лекция 28 (2 слайд)

При наложении однородного электрического поля к гамильтониану частицы

$$\hat{V} = -erE = -ezE = -erE \cos \vartheta.$$

добавляется возмущение

Очевидно, функции  $\psi_{n,l,m}^{(0)}(r)$

являются правильными функциями нулевого приближения, поскольку все

$$V_{mm'} = -eE \int dr \psi_{n,l,m}^{(0)}(r) r \cos \vartheta \psi_{n,l,m'}^{(0)}(r) \quad (1)$$

равны нулю. Действительно, зависимость невозмущенной собственной функции

$$\psi_{n,l,m}^{(0)}(r)$$

от  $\vartheta$  определяется сферической функцией  $Y_{lm}$ ,

оператора возмущения

- сферической функцией  $Y_{10}$ , поэтому матричный элемент:

$$V_{mm'} = \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(m-m')\varphi} \quad (2)$$

равен нулю, если  $m \neq m'$ .

$m = m'$ ,

поскольку  $|Y_{lm}|^2$  -

Этот матричный элемент равен нулю и для

$l, Y_{10}$  -

четная функция для любого

нечетная. Следовательно,

расщепления уровней энергии не происходит

## Лекция 28 (3 слайд)

Рассмотрим теперь бесспиновую заряженную частицу, находящуюся в центральном

поле, на которую наложено слабое однородное магнитное поле, направленное вдоль

оси  $z$ . В первом порядке теории возмущений найдем расщепление энергетического

уровня с полным моментом  $l$ . Волновые функции стационарных состояний, отвечающие одному уровню энергии

могут быть выбраны как

$$\psi_j^{(0)} \rightarrow \psi_{n,l,m}^{(0)}(\mathbf{r}) = R_{n,l}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (3)$$

где радиальная функция  $R_{n,l}(r)$  одинакова для всех состояний, отвечающих данному

уровню энергии (здесь мы также предполагаем, что «случайное» вырождение по моменту, характерное, например, для движения частицы в кулоновском поле или для гармонического осциллятора, отсутствует).

трехмерного гармонического осциллятора

## Лекция 28 (4 слайд)

Классическая энергия взаимодействия заряженной частицы с магнитным полем

напряженности  $\vec{H}$  определяется выражением  $\hat{V} = -\vec{\mu} \vec{H}$ , где  $\vec{\mu}$  - магнитный момент,

связанный с движением частицы в пространстве:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2Mc} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{e}{2Mc} \vec{L} = \mu_0 \vec{L} \quad (4)$$

где  $e$  - заряд частицы,  $M$  - ее масса,  $c$  - скорость света,  $\vec{L}$  - момент импульса. Из этих

величин можно построить квантовомеханический оператор взаимодействия

частицы с магнитным полем

$$\hat{V} = -\mu_0 H \hat{L}_z \quad (5)$$

(где  $H$  - проекция магнитного поля на ось  $z$ ).

## Лекция 28 (5 слайд)

Очевидно, для возмущения (5) собственные функции невозмущенного гамильтониана

являются правильными функциями нулевого приближения. Действительно, легко проверить, что все недиагональные матричные элементы оператора (5)

$$V_{mm'} = \int d\mathbf{r} \psi_{n,l,m}^{(0)*}(\mathbf{r}) \hat{L}_z \psi_{n,l,m'}^{(0)}(\mathbf{r}) = m' \int d\mathbf{r} \psi_{n,l,m}^{(0)*}(\mathbf{r}) \psi_{n,l,m'}^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

равны нулю из-за ортогональности собственных функций невозмущенного

гамильтониана. Поэтому поправки первого порядка к энергии уровня определяются

диагональными матричными элементами оператора (5) с функциями (3). Находим

$$E_m^{(1)} = V_{mm} = -\mu_0 H \left( \hat{L}_z \right)_{mm} = -\mu_0 H m = -\frac{e\hbar m H}{2Mc} \quad (7)$$

Или

$$E_m = E + E_m^{(1)} = E - \frac{e\hbar m H}{2Mc} \quad m = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l \quad (8)$$

Поэтому вырождение по проекции момента полностью снимается.

## Лекция 28 (6 слайд)

---

Рассмотрим теперь взаимодействие заряженной частицы, находящейся на первом возбужденном уровне энергии в кулоновском поле притяжения с однородным электрическим полем (эффект Штарка).

Напомним, что первый возбужденный уровень энергии электрона в атоме водорода имеет энергию  $E = -e^2 / 8a$  ( $a$  - боровский радиус), является четырехкратно вырожденным, поскольку ему отвечают: одно состояние с моментом  $l = 0$  и три

состояния с моментом  $l = 1$ . Волновые функции состояний, отвечающих первому возбужденному уровню электрона в атоме водорода, могут быть выбраны в следующем виде

## Лекция 28 (7 слайд)

---

$$\psi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}a^{3/2}} \left( 1 - \frac{r}{2a} \right) e^{-r/2a} Y_{00}(\vartheta, \varphi) \quad (9)$$

$$\psi_{2,3,4}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}a^{5/2}} r e^{-r/2a} Y_{1m}(\vartheta, \varphi), \quad m = -1, 0, +1 \quad (10)$$

## Лекция 28 (8 слайд)

При наложении на атом однородного электрического поля к гамильтониану электрона

добавляется возмущение  $\hat{V} = -erE \cos \vartheta$ . Ищем правильные функции в виде неизвестных

линейных комбинаций функций (9), (10). Подставляя эти линейные комбинации в уравнение

и умножая его последовательно на  $\psi_i^{(0)}$  и интегрируя, получим

систему уравнений для коэффициентов

$$\begin{cases} (E - \varepsilon + V_{11})C_1 + V_{12}C_2 + V_{13}C_3 + V_{14}C_4 = 0 \\ V_{21}C_1 + (E - \varepsilon + V_{22})C_2 + V_{23}C_3 + V_{24}C_4 = 0 \\ V_{31}C_1 + V_{32}C_2 + (E - \varepsilon + V_{33})C_3 + V_{34}C_4 = 0 \\ V_{41}C_1 + V_{42}C_2 + V_{43}C_3 + (E - \varepsilon + V_{44})C_4 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

## Лекция 28 (9 слайд)

Среди всех матричных элементов, входящих в систему уравнений (11) не равны нулю только матричные элементы  $V_{31} = V_{13}$

$$V_{31} = V_{13} = -3eaE \quad (12)$$

Система однородных уравнений для неизвестных коэффициентов (11) имеет ненулевые решения, если ее определитель равняется нулю. Поэтому

$$(\varepsilon - E)^2 \left[ (\varepsilon - E)^2 - (3eaE)^2 \right] = 0 \quad (13)$$

Из уравнения (13) в первом порядке теории возмущений находим энергии подуровней,

на которые расщепляется первый возбужденный уровень атома водорода

$$\varepsilon_{1,2} = E \quad \varepsilon_3 = E - 3eaE \quad \varepsilon_4 = E + 3eaE \quad (14)$$

## Лекция 28 (10 слайд)

Поскольку первый корень является двукратно вырожденным, то четырехкратно

вырожденный невозмущенный уровень расщепится на три подуровня, один из которых будет двукратно вырожденным. Таким образом, вырождение, имеющее место невозмущенного атома, снимается только частично.

Очевидно, этим подуровням отвечают следующие правильные функции. Тем подуровням,

которые не сдвинутся по сравнению с невозмущенной задачей, - состояния с моментом

$$l = 1 \quad m = +1 \quad m = -1$$

и проекциями и или любая их линейная комбинация). Сдвинутым состояниям – линейные комбинации состояний с  $l = 1, m = 0$  и  $l = 0, m = 0$ .