<u>Лекция 32.</u> Переходы под действием периодических возмущений. Резонансное приближение.

Рассмотрим теперь случай возмущений, зависящих от времени периодически

$$\hat{V}(x,t)=\hat{V}(x)\cos\omega t \qquad (1)$$

где ω - частота возмущения, причем возмущение действует в течение длительного времени T, так что $\omega T \gg 1$. Докажем, что в первом порядке теории возмущений переходы происходят только в такие состояния n, энергия которых отличаются от энергии начального состояния на величину $\hbar\omega$: $\varepsilon_n=\varepsilon_k \pm \hbar\omega$.

Исходим из формулы теории нестационарных возмущений

$$w_{k\to n}=\frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^T V_{kn}(t)e^{i\omega_{kn}t}dt\right|^2=\frac{\left|V_{kn}\right|^2}{\hbar^2}\left|\int_0^T \cos\omega t\, e^{i\omega_{kn}t}dt\right|^2 \qquad (2)$$

где V_{kn} - матричный элемент оператора $\hat{V}(x)$.

Лекция 32 (2 слайд)

Интеграл по времени вычисляется элементарно:

$$\int_0^T \cos\omega t\, e^{i\omega k_{kn} t} dt = \frac{1}{2}\left\{ \frac{e^{i(\omega_{kn}+\omega)T}-1}{i(\omega_{kn}+\omega)} + \frac{e^{i(\omega_{kn}-\omega)T}-1}{i(\omega_{kn}-\omega)} \right\} \qquad (3)$$

Рассмотрим зависимость вероятности перехода (2), (3) от частоты возмущения

ω . емое в формуле (3) как функция частоты

Как будет показано ниже, первое слага

$\omega = (\varepsilon_n - \varepsilon_k)/\hbar$,

возмущения имеет узкий максимум при частоте второе – при

$\omega = (\varepsilon_k - \varepsilon_k)/\hbar$.

частоте Поэтому при анализе зависимости вероятности (2), (3) от

ω $\omega \approx (\varepsilon_n - \varepsilon_k)/\hbar$

частоты возмущения достаточно рассмотреть только значения и

$\omega \approx (\varepsilon_k - \varepsilon_n)/\hbar$

и ограничится в первом случае только первым слагаемым формулы (3),

ором - вторым.

во вт

Лекция 32 (3 слайд)

Итак, при $\omega \approx (\varepsilon_n - \varepsilon_k)/\hbar$ из (2), (3) имеем

$$
\begin{aligned}
w_{k\to n} &= \frac{\left|V_{kn}\right|^2}{4\hbar^2(\omega_{kn}-\omega)^2}\left|\cos\left(\omega_{kn}-\omega\right)T + i\sin\left(\omega_{kn}-\omega\right)T - 1\right|^2 = \\
&= \frac{\left|V_{kn}\right|^2}{\hbar^2(\omega_{kn}-\omega)^2}\sin^2\frac{\left(\omega_{kn}-\omega\right)T}{2}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Рассмотрим зависимость вероятности перехода $w_{k\to n}$ (4) от частоты возмущения

при больших значениях T.

Лекция 32 (4 слайд)

Если $(\omega_{kn}-\omega)T \ll 1$, то $\sin^2 \ldots$ в (4) можно разложить в ряд и

$$w_{k\to n} = \frac{|V_{kn}|^2 T^2}{4\hbar^2} \qquad (5)$$

Если же $(\omega_{kn}-\omega)T \gg 1$, то $\sin^2 \ldots$ в (5) может для разных T принимать все значения

от нуля до единицы и, следовательно,

$$w_{k\to n} \le \frac{|V_{kn}|^2}{\hbar^2(\omega_{kn}-\omega)^2} \ll \frac{|V_{kn}|^2 T^2}{\hbar^2} \qquad (6)$$

Таким образом, если частота возмущения ω лежит в узком интервале частот $\delta\omega \sim 1/T \ll \omega$ вблизи частоты, равной ω_{nk}, то вероятность перехода $k\to n$, существенно превосходит вероятность этого перехода, происходящего под действием возмущения с частотой, вне этого интервала (причем этот интервал тем уже, чем больше время действия возмущения).

Лекция 32 (5 слайд)

Другими словами, при фиксированной частоте возмущения ω квантовая система с подавляющей вероятностью совершает переходы только в такие состояния n, энергии которых определяется соотношением $\varepsilon_n \approx \varepsilon_k + \hbar\omega$, где ε_k - энергия

агаемого в (3)

начального состояния. Аналогичное рассмотрение второго сл

приводит к возможности перехода в состояния n с энергиями $\varepsilon_n \approx \varepsilon_k - \hbar\omega$.

Переходы в состояния с другими энергиями под действием периодических

тны. При этом, если выполняются строгие равенства

возмущений маловероя

$\varepsilon_n = \varepsilon_k \pm \hbar\omega$, вероятность перехода $k \to n$ при достаточно больших T может стать

ожет оказаться

большой, и для ее вычисления теория возмущений м

неприменимой.

Лекция 32 (6 слайд)

В этом случае используют другое приближение, которое называют резонансным.

Основная идея его заключается в том, что если частота возмущения близка к частоте перехода между двумя состояниями, то с подавляющей вероятностью переходы будут происходить только в одно состояние, а всеми остальными слагаемыми в разложении волновой функции системы по волновым функциям стационарных состояний можно пренебречь.

Итак, пусть

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^{+}e^{i\omega t}.$$

и ω близко к ω_0 (ω_0 - частота перехода между двумя состояниями ψ_1 и ψ_2 в системе);

пусть (для определенности) - чуть больше:

$$\omega = \omega_0 + \Delta; \qquad |\Delta| \ll \omega_0.$$

Величину Δ называют «отстройкой».

Лекция 32 (7 слайд)

Будем искать решения уравнения Шредингера в виде

$$\Psi(t) = a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2.$$

(
в этом и состоит приближение). Подставляя это выражение в уравнение и
оставляя только главные члены (зависимость которых от времени определяется

малой частотой $\omega - \omega_0 = \Delta$), п олучим

$$i\hbar\frac{da_1}{dt} = F_{12}e^{-i\Delta t}a_2$$

$$i\hbar\frac{da_2}{dt} = F_{21}^{*}e^{i\Delta t}a_1 \qquad (9)$$

Делаем подстановку $a_i = b_i e^{-i\Delta t}$,
получаем

$$i\hbar\dot{a}_1 = F_{12}b_2 \qquad i\hbar\left(b_2 - i\Delta b_2\right) = F_{21}^{*}a_2 \qquad (10)$$

Лекция 32 (8 слайд)

Исключаем из этих уравнений a_2,

получим:

$$\ddot{b}_2 - i\Delta\dot{b}_2 + \frac{1}{\hbar^2}\left|F_{21}\right|^2 b_2 = 0 \qquad (11)$$

В качестве линейно независимых решений этих уравнений выбираем

$$a_2 = Ae^{i\alpha_1 t}, \qquad a_1 = -A\frac{\hbar\alpha_1}{F_{12}^{\;*}}e^{i\alpha_2 t}$$

$$a_2 = Be^{-i\alpha_2 t}, \qquad a_1 = -A\frac{\hbar\alpha_2}{F_{12}^{\;*}}e^{-i\alpha_1 t} \qquad (12)$$

Лекция 32 (9 слайд)

где A и B постоянные, и введены обозначения

$$\alpha_1 = -\frac{\Delta}{2} + \Omega, \qquad \alpha_2 = \frac{\Delta}{2} + \Omega, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \frac{\left|F_{12}\right|^2}{\hbar^2}} \tag{13}$$

Таким образом, под влиянием возмущения функции ψ_1 и ψ_2 переходят в функции $a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2$ с коэффициентами (12), (13). Из этих формул следует, что если в начальный момент система находилась в состоянии ψ_1, то коэффициент при ψ_2 в последующем равен

$$\frac{\left|F_{12}\right|^2}{2\hbar^2\Omega^2}\left(1 - \cos 2\Omega t\right) \tag{14}$$

Лекция 32 (10 слайд)

Из формулы (14) следует, что система периодически (с периодом π / Ω)

дного состояния в другое и обратно. Частота Ω

переходит из о называется

Раби.

частотой