Лекция 33. Системы тождественных частиц. Бозоны и фермионы

Волновая функция физической системы, состоящей из нескольких частиц, должна зависеть от координат всех частиц и времени

$$\Psi \to \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) \qquad (1)$$

где первый аргумент относится к первой частице, второй - ко второй и т.д., причем квадрат модуля волновой функции (1) определяет плотность вероятности того, что в момент времени t первая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_1$, вторая - $\vec{r}_2$ и т.д. Если все частицы системы тождественные (например электроны, протоны или другие одинаковые частицы), то функция (1) должна удовлетворять определенным

условиям симметрии относительно перестановок аргументов

Лекция 33 (2 слайд)

Действительно, поскольку в микромире невозможно проследить за перемещением частиц, то такие события, как «первая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_1$, вторая - $\vec{r}_2$» и «первая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_2$, вторая – $\vec{r}_1$» являются принципиально неразличимыми. Можно говорить только о том, что одна из частиц (неизвестно, какая) находится в точке с координатой $\vec{r}_1$, а вторая - $\vec{r}_2$. Это значит, что множество значений функции (1) для системы тождественных частиц является избыточным, поскольку величины

$$\left|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t)\right|^2 \quad \text{и} \quad \left|\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, ..., t)\right|^2 \qquad (2)$$

определяют, фактически, одну и ту же величину. Поэтому волновая функция (1) для системы тождественных частиц может быть только такой функцией, квадраты значений которой в «точке» с координатами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t$ и в «точке» с координатами $\vec{r}_2, \vec{r}_1, ..., t$ должны быть одинаковыми:

Лекция 33 (3 слайд)

$$\left|\Psi(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, t)\right|^2 = \left|\Psi(\vec r_2, \vec r_1, \ldots, t)\right|^2 \qquad (3)$$

(и аналогично для других перестановок). То есть при перестановке любых двух аргументов квадрат модуля волновой функции не должен меняться. Отсюда получаем, что волновая функция системы тождественных частиц может быть только такой функцией своих аргументов, что при перестановке двух из них ее значение, если и изменятся, то только на множитель с единичным квадратом модуля

$$\Psi(\vec r_1, \vec r_2, \ldots, t) = e^{i\alpha}\Psi(\vec r_2, \vec r_1, \ldots, t) \qquad (4)$$

где α - действительное число

Лекция 33 (4 слайд)

Снова переставляя первый и второй аргументы функции в правой части выражения

(3),

найдем

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = e^{i\alpha}\Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, ..., t) = e^{i\alpha}e^{i\alpha}\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) \qquad (5)$$

Отсюда заключаем, что $e^{i\alpha} = \pm 1$.

Таким образом, тождественность частиц приводит

к тому, что частицы могут описываться только функциями, которые не меняются
ументов, либо меняют при перестановке знак. Например,
при перестановке арг
система

двух тождественных частиц в принципе не может описываться такой волновой функцией

$\Psi(x_1, x_2) = \sin(x_1 / a)e^{-(x_2/b)}$;

$\Psi(x_1, x_2) = e^{-(x_1 - x_2)^2/b^2}$

волновая функция вида в
принципе

может описывать одно из возможных состояний системы. Волновые функции, не
ывать симметричными,
меняющие знак при перестановке аргументов, принято наз

меняющие знак – антисимметричными

Лекция 33 (5 слайд)

Очевидно, способность описываться симметричными или антисимметричными

овыми функциями определяется природой частиц, и не зависит от их
волн
конкретного

состояния. Действительно, пусть, например, возможны два состояния системы
тричной волновой функцией, другое с
электронов - одно с симме
антисимметричной.

иции возможно и состояние-суперпозиция,
Тогда согласно принципу суперпоз
волновая

функция которого представляет собой линейную комбинацию этих функций. Очевидно,

трией по отношению к перестановкам
эта волновая функция определенной симме

аргументов не обладает

Лекция 33 (6 слайд)

Можно обобщить приведенные выше рассуждения на случай частиц со спином.

Поскольку для одинаковых частиц физически тождественными являются такие события, когда первая и вторая частица «меняются» всеми своими координатами - например, «первая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_1$ с проекцией спина s_{z1}, вторая находится в точке с координатой $\vec{r}_2$ с проекцией спина s_{z2}» и «первая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_2$ с проекцией спина s_{z2}, вторая частица находится в точке с координатой $\vec{r}_1$ с проекцией спина s_{z1}», то волновая функция системы частиц со спином должна быть симметричной или антисимметричной при одновременной перестановке и пространственных и спиновым координат

$$\Psi(\vec{r}_1, s_{z1}, \vec{r}_2, s_{z2}, ..., t) = \pm\Psi(\vec{r}_2, s_{z2}, \vec{r}_1, s_{z1}, ..., t) \quad (6)$$

Лекция 33 (7 слайд)

В релятивистской квантовой теории доказывается, что частицы с целым спином ($s=0$, $s=1$, $s=2$, ...) описываются симметричными волновыми функциями и называются бозонами, частицы с «полуцелым» спином ($s=1/2$, $s=3/2$, $s=5/2$, ...) - антисимметричными волновыми функциями и называются фермионами

Лекция 33 (8 слайд)

Рассмотрим теперь стационарные состояния двух тождественных

Невзаимодействующих частиц. Оператор Гамильтона системы имеет вид

$$H(x_1, x_2) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_1^{\,2}} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_2^{\,2}} + U(x_1) + U(x_2) \qquad (8)$$

является симметричным относительно перестановок координат и для фермионов

и для бозонов, поскольку частицы тождественные. Решения уравнения Шредингера

могут быть перечислены двумя целыми индексами и имеют вид

$$\psi_{nk}(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1)\varphi_k(x_2) \qquad E_{nk} = \varepsilon_n + \varepsilon_k \qquad (9)$$

причем индексы n и k независимо друг от друга принимают все возможные для них значения. Очевидно, все уровни энергии с $n \neq k$ являются двукратно вырожденными: собственному значению $E_{nk} = \varepsilon_n + \varepsilon_k$ отвечают две различные собственные функции $\varphi_n(x_1)\varphi_k(x_2)$ и $\varphi_n(x_2)\varphi_k(x_1)$ (или любые их линейные комбинации). Состояния с $n = k$ являются невырожденными

Лекция 33 (9 слайд)

Учтем теперь тождественность частиц. Потребуем, чтобы волновые функции обладали определенной симметрией относительно перестановок аргументов – были симметричны относительно перестановок в случае бозонов, и бы антисимметричны

в случае фермионов. Очевидно, функции

$$\psi_{nn}(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1)\varphi_n(x_2) \qquad (10)$$

и

$$\psi_{nk}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_n(x_1)\varphi_k(x_2) + \varphi_n(x_2)\varphi_k(x_1)\right) \qquad (11)$$

являются собственными функциями гамильтониана системы двух частиц и симметричны относительно перестановок аргументов, то есть описывают

стационарные состояния системы двух тождественных бозонов.

Лекция 33 (10 слайд)

Аналогично функции

$$\psi_{nk}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_n(x_1)\varphi_k(x_2) - \varphi_n(x_2)\varphi_k(x_1)\right) \qquad (12)$$

являются собственными функциями гамильтониана системы двух частиц и антисимметричны относительно перестановок аргументов, то есть описывают

стационарные состояния системы двух тождественных фермионов. При этом так же как и в случае бозонов все состояния невыр ождены. Однако в отличие от

бозонного случая здесь невозможны состояния, в которых оба фермиона находятся в одинаковых стационарных состояниях одночастичного гамильтониана ($n = k$), поскольку в этом случае функция (17) тождественно равна нулю. Это утверждение

называется принципом Паули.