Лекция 34. Обменное взаимодействие. Симметрия координатных и спиновых функций

Докажем, что в системе тождественных невзаимодействующих частиц

существуют определенные корреляции в движении частиц, то есть некоторое взаимодействие. Для доказательства существования такого взаимодействия рассмотрим следующий пример: пусть есть система двух тождественных невзаимодействующих бозона со спином $s = 0$, которая находится в таком состоянии, в котором один из них описывается одночастичной волновой функцией $\varphi_1(x)$, другой - $\varphi_2(x)$. Пусть обе функции и $\varphi_1(x)$, и $\varphi_2(x)$ обладают определенной четностью (в этом случае результаты получаться более наглядными).

Найдем вероятность того, что обе частицы находятся в полупространстве $x > 0$.
Основная идея задачи заключается в том, чтобы построить волновую функцию системы и проинтегрировать ее квадрат по полупространству $x > 0$.

Лекция 34 (2 слайд)

Волновая функция $\psi(x_1, x_2)$ рассматриваемого состояния системы двух бозонов имеет вид

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)\right)$$

Вероятность того, что обе частицы системы находятся в полупространстве $x > 0$, определяется выражением

$$w(x_1, x_2 > 0) = \int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^\infty dx_2 \left|\psi(x_1, x_2)\right|^2 \qquad (2)$$

Подставляя функцию (1) в выражение (2), получим

$$w(x_1, x_2 > 0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty dx_1 \int\limits_0^\infty dx_2 (\left|\varphi_1(x_1)\right|^2 \left|\varphi_2(x_2)\right|^2 + \left|\varphi_1(x_2)\right|^2 \left|\varphi_2(x_1)\right|^2 + \qquad (3)$$

$$+ \varphi_1^*(x_1)\varphi_2^*(x_2)\varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1) + \varphi_1^*(x_2)\varphi_2^*(x_1)\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2))$$

Лекция 34 (3 слайд)

Интегралы от первого и второго, а также третьего и четвертого слагаемого равны

(

в этом легко убедиться, если сделать во втором и четвертом интеграле замены $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$).

переменных интегрирования Поэтому выражение (3) можно привести к виду

$$w(x_1, x_2 > 0) = \int_0^\infty dx_1 \left|\varphi_1(x_1)\right|^2 \int_0^\infty dx_2 \left|\varphi_2(x_2)\right|^2 + \left|\int_0^\infty dx_1 \varphi_1(x_1)\varphi_2^*(x_1)\right|^2 \qquad (4)$$

Так как обе функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ имеют определенную четность, то функции $\left|\varphi_1(x)\right|^2$

и $\left|\varphi_2(x)\right|^2$ - четные, и из условия нормировки функций следует, что

$$\int_0^\infty dx_1 \left|\varphi_1(x_1)\right|^2 \int_0^\infty dx_2 \left|\varphi_2(x_2)\right|^2 = \frac{1}{4} \qquad (5)$$

Лекция 34 (4 слайд)

Поэтому вероятность того, что обе частицы находятся в области $x > 0$

определяется соотношением

$$w(x_1, x_2 > 0) = \frac{1}{4} + |A|^2 \qquad (6)$$

где буквой A

обозначен интеграл

$$A = \int_0^\infty dx_1 \varphi_1(x_1)\varphi_2^*(x_1) \qquad (7)$$

Интеграл (7), вообще говоря, не равен нулю. Поэтому вероятность (6)

больше 1/4

Лекция 34 (5 слайд)

Если частицы были бы нетождественными, волновая функция системы имела бы вид $\psi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$, и вероятность того, что обе частицы в рассматриваемом состоянии имеют координаты $x > 0$, равнялась бы 1/4. Последний результат является естественным, поскольку: (а) вероятность того, что каждая частица в рассматриваемом состоянии имеет положительную координату равна 1/2, (б) частицы не взаимодействуют, и, следовательно, никак не влияют друг на друга (на языке теории вероятностей это значит, что любые события, происходящие с разными частицами, являются независимыми), (в) вероятность события $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, происходящего с двумя независимыми частицами, равна произведению вероятностей событий, происходящих с каждой частицей в отдельности.

Лекция 34 (6 слайд)

Поскольку для тождественных частиц эта вероятность отличается от 1/4, то для таких частиц утверждение (б) (и, следовательно (в)) является неверным.

То есть даже невзаимодействующие тождественные частицы не являются независимыми. Это значит, что существует взаимное влияние этих частиц друг на друга, приводящее к корреляциям в их движении. Причем, как это следует из полученных результатов, для рассматриваемой системы тождественных бозонов эти корреляции носят характер притяжения. Очевидно, что влияние частиц друг на друга зависит от состояний частиц. В частности, если бы интеграл (7) от произведения

волновых функций был равен нулю, корреляции в их движении отсутствовали. Если

же волновая функция системы была антисимметричной, то такое взаимодействие носило бы характер отталкивания, поскольку вероятность обнаружить обе частицы в полупространстве $x > 0$ была бы меньше $\frac{1}{2}$.

тождественных частиц называется обменным.

Лекция 34 (7 слайд)

Теперь вспомним о том, что рассматриваемые тождественные частицы, вообще говоря, облают спином и, говоря о волновой функции, нужно говорить о ее пространственной и спиновой части. И требования симметрии распространяются на всю волновую функцию, а не только пространственную или спиновую часть. Теме не менее справедливо следующее утверждение: в системе двух частиц (не обязательно тождественных) с одинаковыми спинами s волновые функции состояний с определенным значением суммарного спина имеют определенную симметрию по отношению к перестановкам спиновых координат частиц. При этом состояния с суммарным спином $S = 2s$, $S = 2s - 2$, $S = 2s - 4$, ... являются симметричными, а состояния с суммарным спином $S = 2s - 1$, $S = 2s - 3$, ... – антисимметричными

Лекция 34 (8 слайд)

Обратим внимание на то, что свойство симметрии или антисимметрии

спиновых функций не связано с тем, являются частицы фермионами или бозонами, более того, не связано с тем, являются ли они тождественными.

Эти свойства симметрии связаны с принципами построения функций с

определенным суммарным спиновым моментом

Лекция 34 (9 слайд)

Рассмотренная симметрия спиновых функций приводит к тому, что определенной симметрией в состояниях с определенным суммарным спином обладает и координатная функция. Пусть, например, суммарный спин системы бозонов равен $S = 2s$. Тогда спиновая функция симметрична. А поскольку полная волновая функция системы бозонов симметрична по отношению к одновременной перестановке пространственных и спиновых координат частиц, то и координатная функция должна быть симметрична. Если рассматриваемые частицы - фермионы (полная волновая функция антисимметрична), и суммарный спин системы равен $S = 2s$, $S = 2s - 2$, $S = 2s - 4$, ... , то пространственная часть антисимметрична, если суммарный спин - $S = 2s - 1$, $S = 2s - 3$, ... -, то пространственная часть волновой функции симметрична.

Лекция 34 (10 слайд)

В состояниях, в которых суммарный спин не имеет определенного значения,

спиновая часть волновой функции определенной симметрией по отношению к перестановкам спиновых переменных, вообще говоря, не обладает, поэтому и пространственная часть волновой функции также не имеет определенной симметрии по отношению к перестановкам