<u>Лекция 36.</u> Квантовое описание рассеяния. Амплитуда и сечение рассеяния

Процессом рассеяния называется отклонение частиц от первоначального

движения бл агодаря взаимодействию с рассевателем. Процесс рассеяния дает

информацию о взаимодействии рассеивающихся частиц и их структуре. Впервые

процесс рассеяния был использован Э.Резерфордом для построения планетарной

модели атома. Если в процессе рассеяния не мен яется структура рассеивающихся

частиц и не меняется их внутреннее состояние, то рассеяние называется упругим.

Если внутреннее состояние частиц меняется, то рассеяние называется н еупругим.

Ниже будет рассматриваться только упругое рассеяние.

Лекция 36 (2 слайд)

В реальной постановке опытов по рассеянию: мы всегда имеем поток частиц,

змеряем распределение частиц по углу рассеяния.

падающих на рассеиватель, а и

Для характеристики процесса вводится понятие дифференциального сечения

$dN(\vartheta)$, еянных

рассеяния, которое определяется как отношение числа частиц расс

ϑ $d\Omega$

в единицу времени под углом в интервал телесного угла к плотности

ока падающих частиц j

пот

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{dN(\vartheta)}{j} \qquad (1)$$

Эта величина называется дифференциальным сечением рассеяния.

Дифференциальное

ечение показывает величину площади, попадая в которую частицы рассеиваются

с

под

ϑ елесного угла $d\Omega$.

углом в малый интервал т Интеграл по полному телесному

углу (если он сходится) называется полным сечением рассеяния

Лекция 36 (3 слайд)

Основная идея квантовомеханического описания процесса рассеяния заключается в том, что волновая функция позволяет найти сечение рассеяния. Поэтому для описания процесса рассеяния необходимо найти волновую функцию $\Psi(\vec{r})$

E

рассевающихся частиц. Волновая функция частиц с определенной энергией

едингера

является решением уравнения Шр

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

Пусть частицы падают на рассеивающий центр в положительном направлении оси z.

Тогда на больших расстояниях волновая функция падающих частиц есть плоская и рассеянная волна

$$e^{ikz} + \frac{f(\vartheta)e^{ikr}}{r}$$

Функция угла рассеяния $f(\vartheta)$ - уда рассеяния.

амплит

Лекция 36 (4 слайд)

По функции (4) легко найти дифференциальное сечение рассеяния. Для этого

по функции e^{ikz} находим поток рассеянных частиц

$$j_1 = \frac{\hbar k\,|\,f(\vartheta)\,|^2}{mr^2}$$

Количество частиц, рассеянных в элемент телесного угла $d\Omega$, есть $j_1 r^2 d\Omega$.

Отсюда находим для дифференциального сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = |\,f(\vartheta)\,|^2$$

Таким образом, для нахождения дифференциального сечения необходимо

решить уравнение Шредингера с граничным условием задачи рассеяния, из

этого решения найти амплитуду рассеяния, а затем сечение рассеяния

Лекция 36 (5 слайд)

Прежде чем рассмотреть способы конкретные вычисления амплитуды рассеяния

ра ссмотрим одно общее свойство амплитуды рассеяния, которое называют условием

унитарности для рассеяния.
Согласно определению полное сечение рассеяния пропорционально полному

количеству рассеянных в единицу времени частиц. Поэтому количество частиц, движущихся в первоначальном направл ении, должно уменьшиться на эту величину.

Это значит, что слагаемое, связанное с рассеянными частицами

$$\frac{f(\vartheta = 0)e^{ikr}}{r}$$

описывает уменьшение частиц в падающем потоке.

Лекция 36 (6 слайд)

Легко проверить с помощью формулы для плотности потока, что это

ссеяния при

уменьшение будет пропорционально мнимой части амплитуды ра

$\vartheta = 0$ (

или, как часто говорят, амплитуды рассеяния «вперед» или «на угол нуль»).

езультате имеем

В р

$$\operatorname{Im} f(\vartheta = 0) = \frac{k}{4\pi}\sigma = \frac{k}{2}\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \, | f(\vartheta) |^2$$

Это уравнение называется оптической теоремой для рассеяния и является следствием

охранения числа частиц: в области действия потенциала нет ни «источников»,

с

стиц.

ни «стоков» на

Лекция 36 (7 слайд)

Обратимся теперь к вычислению амплитуды рассеяния. Для теоретического исследования этой величины и построения приближенных методов ее вычисления удобно перейти от дифференциального уравнения Шредингера к интегральному уравнению. Для этого перепишем уравнение Шредингера в виде

$$\left(\Delta + k^2\right)\Psi(\vec{r}) = \frac{2mU(\vec{r})}{\hbar^2}\Psi(\vec{r})$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Для решения этого уравнения используем метод функций Грина.

Функцией Грина называется функция двух переменных $G(\vec{r},\vec{r}')$, которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\Delta + k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Лекция 36 (8 слайд)

Нетрудно видеть, что решение уравнения Шредингера $\Psi(\vec{r})$ можно с помощью функции Грина записать следующим образом

$$\Psi(\vec{r}) = e^{ikz} + \int G(\vec{r}, \vec{r}\,') \frac{2mU(\vec{r}\,')}{\hbar^2} \Psi(\vec{r}\,') d\vec{r}\,'$$

Это выражение не есть ответ для волновой функции задачи рассеяния в квадратурах – это интегральное уравнение, поскольку функция $\Psi(\vec{r})$ входит и в правую часть. Однако оно гораздо удобнее для исследований, чем дифференциальное уравнение.

Лекция 36 (9 слайд)

Используя известное выражение для функции Грина свободного уравнения Шредингера

$$G(\vec r, \vec r') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|}$$

получим

$$\Psi(\vec r) = e^{ikz} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}U(\vec r')\Psi(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}d\vec r'$$

Рассмотрим $\vec r \to \infty$ (имеется в виду на расстояниях, много больших, чем радиус действия рассеивающего потенциала). В этом случае можно считать, что $|\vec r| \gg |\vec r'|$.

Лекция 36 (10 слайд)

Разлагая разность $|\vec{r}-\vec{r}'|$ в ряд по малому параметру r'/r,

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}$$

получаем

$$\Psi(\vec{r}) = e^{ikz} - \frac{m e^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{-i\vec{k}\vec{r}'}U(\vec{r}')\Psi(\vec{r}')d\vec{r}'$$

где введено обозначение $\vec{k} = \frac{k\vec{r}}{r}$, причем вектор $\vec{k}$ направлен, очевидно, по радиус-вектору. Отсюда

$$f(\vartheta) = \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{k}\vec{r}'}U(\vec{r}')\Psi(\vec{r}')d\vec{r}'$$

Эта формула определяет амплитуду рассеяния через решение уравнения Шредингера в области действия потенциала. Таким образом для его использования необходимо решить уравнение Шредингера и вычислить интеграл