Лекция 38. Фазовая теория рассеяния

Наряду с теорией рассеяния, изложенной в предыдущей лекции, часто используется другой вариант теории, именуемый фазовой теорией рассеяния. Основная идея этой теории заключается в разложении волновой функции задачи рассеяния по состояниям с определенным моментам (по сферическим функциям). В результате и для амплитуды рассеяния получается разложение на так называемые парциальные амплитуды, знание которых позволяет свести вычисление амплитуды рассеяния к суммированию бесконечного ряда.

Лекция 38 (2 слайд)

Пусть рассеяние частиц происходит на сферически симметричном потенциале,

и частицы падают на потенциал вдоль оси z. Тогда на больших расстояниях от

рассеивающего центра волновая функция задачи рассеяния имеет вид:

$$\Psi(r,\vartheta) = e^{ikz} + \frac{f(\vartheta)e^{ikr}}{r} \qquad (1)$$

где $f(\vartheta)$ - амплитуда рассеяния. Разложим функцию (1) по сферическим функциям.

При этом заметим, что благодаря выбранной геометрии задачи (падение частиц вдоль

оси z) угол рассеяния ϑ в формуле (1) есть полярный угол сферической системы

координат, а от азимутального угла φ в формуле (1) вообще ничего не зависит.

Поэтому, фактически, разложение будет прои зводится по функциям Y_{l0}, которые с

точностью до множителя совпадают с полиномами Лежа ндра от $\cos\vartheta$.

Лекция 38 (3 слайд)

Начнем с разложения функции e^{ikz}.

Можно показать, что разложение функции $e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta}$ по полиномам Лежандра имеет вид:

$$e^{ikz} = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{\sin\left(kr - l\pi/2\right)}{kr} P_l(\cos\vartheta) \qquad (2)$$

С другой стороны, общее решение стационарного уравнения Шредингера в поле с центральной симметрии, не зависящее от переменной φ, на больших расстояниях от области действия потенциала может быть записано в виде

$$\Psi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\sin\left(kr + \delta_l - l\pi/2\right)}{kr} P_l(\cos\vartheta) \qquad (3)$$

где C_l - коэффициенты разложения, δ_l - некоторые действительные фазовые сдвиги, возникающие из-за взаимодействия рассеивающихся частиц с потенциалом.

Величины δ_l называются фазами рассеяния.

Лекция 38 (4 слайд)

Амплитуду рассеяния можно выразить через фазы рассеяния. Для этого найдем

разность $\Psi(r,\vartheta)-e^{ikz}$

на больших расстояниях от области действия потенциала.
С одно стороны, эта разность есть

$$\frac{f(\vartheta)e^{ikr}}{r} \qquad (4)$$

С другой стороны, эта разность определяется разностью формул (2), (3), из

которых должна, следовательно, выпасть сходящаяся сферическая волна
e^{-ikr}/r.
аходим, что
Поэтому, вычитая (2) из (3) н

$$C_l = i^l(2l+1)e^{i\delta_l} \qquad (5)$$

Лекция 38 (5 слайд)

Подставляя теперь коэффициенты C_l (5)

в формулу (3) и вычитая (2) из (3)

мплитуду рассеяния

находим а

$$f(\vartheta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[e^{2i\delta_l}-1\right]P_l(\cos\vartheta)=\frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[S_l-1\right]P_l(\cos\vartheta) \qquad (6)$$

где введено обозначение $S_l=e^{2i\delta_l}$.

Возводя формулу (6) по модулю в квадрат,

еренциальное сечение упругого рассеяния

находим дифф

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left[e^{2i\delta_l}-1\right]P_l(\cos\vartheta)\right|^2 \qquad (7)$$

Лекция 38 (6 слайд)

А интегрируя формулу (7) по углам с использованием ортогональности

полиномов Лежандра – формулу для полного сечения рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l \qquad (8)$$

На основе формул (6), (8) иногда вводят парциальные амплитуды рассеяния

f_l и парциальные сечения рассеяния σ_l. Эти величины определяются как

$$f_l = \frac{1}{2ik}\left(S_l - 1\right) = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) \qquad (9)$$

$$\sigma_l = 4\pi(2l+1)\left|f_l\right|^2 \qquad (10)$$

и определяют амплитуду и сечение рассеяния согласно соотношениям

$$f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l P_l(\cos\vartheta) \qquad (11)$$

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l \qquad (12)$$

Лекция 38 (7 слайд)

Из формул (7), (8) следует, что дифференциальное и полное сечения рассеяния в заданном поле сил выражаются через совокупность фаз рассеяния δ_l (число которых счетно: $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,$ но, вообще говоря, бесконечно). Следовательно, для вычисления сечения рассеяния необходимо найти радиальные волновые функции частицы в силовом поле для всех моментов l. Рассматривая асимптотику этих функций на больших расстояниях от силового центра, можно найти фазы рассеяния $\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,$ а затем по формулам (7), (8) – дифференциальное и полное сечения рассеяния.

Лекция 38 (8 слайд)

Практическая ценность формул фазовой теории рассеяния для эффективного и

полного сечения тем выше, чем меньшее число членов ряда играет

существенную

роль. Докажем, что для малых энергий рассеивающихся частиц это число невелико.

Основная идея этого доказ

ательства заключается в том, что частицы с большим

моментом движутся в эффективном поте

нциале

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} \qquad (13)$$

причем если $U(r)$

быстро спадает с расстоянием, то для достаточно больших

м

оментов и малых энергий центробежный потенциал (второе слагаемое в (13))

может «не пустить» рассеивающиеся частицы в область действия потенциала.

Поэтому, фактически частицы с большими моме

нтами не будут «чувствовать»

потенциал, следовательно, не будут рассеиваться, следовательно, фазы

рассеяния с такими моментами будут равны нулю и не дадут вклад в амплитуду

и сечение ра

ссеяния.

Лекция 38 (9 слайд)

Пусть R - радиус действия потенциала. Частицы с моментом l будут «чувствовать» потенциал, если точка остановки классического движения в центробежном потенциале окажется больше R. Эта точка находится из условия

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2} = E \qquad (14)$$

отсюда находим

$$r \approx \frac{l}{k} \qquad (15)$$

Отсюда следует, что для фиксированной энергии потенциал будут «чувствовать» частицы с моментами $l \le kR$. Частицы с большими моментами будут иметь малые фазы рассеяния и не давать вклад в сечение. Поэтому фазовая теория рассеяния играет важную роль в исследовании рассеяния не слишком быстрых частиц

Лекция 38 (10 слайд)

В частности, если частицы медленные ($kR \ll 1$)

необходимо учитывать только

агаемое с моментом, равным нулю (или, как говорят, учитывать только

одно сл

s-рассеяние). В этом случае, как это следует из формулы (7) дифференциальное

сечение будет равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \qquad (16)$$

Из формулы (16) следует, что дифференциальное сечение рассеяние медленных

исит от угла рассеяния (является изотропным). При увеличении

частиц не зав

p-рассеяние (т.е. в формуле (7) нужно учитывать

энергии частиц «подключается» $l = 1$,

первое и второе, отвечающее слагаемое), а сечение зависит от угла

как $\left|a + b\cos\vartheta\right|^2$. При увеличении энергии частиц начинают играть роль фазы

рассеяния более высокого порядка, и сечение становится более анизотропным