<u>Лекция 6.</u> Зависимость средних от времени. Интегралы движения.

Найдем оператор производной физической величины по времени.

Пусть есть некоторая физическая величина f и ей соответствует оператор $\hat{f}$. Найдем какой оператор будет соответствовать величине $\dot{f}$.

По определению в любом состоянии должно быть выполнено следующее равенство:

$$\overline{\dot{f}} = \frac{d}{dt}\overline{f}$$

Лекция 6 (2 слайд)

Из формулы для средних:

$$\dot{\overline{f}} = \int dq \Psi^*(q,t) \dot{\hat{f}} \Psi(q,t)$$

где $\dot{\hat{f}}$ - искомый оператор производной величины f по времени.
Из у. Ш.:

$$\frac{d}{dt}\overline{f} = \frac{d}{dt}\int dq \Psi^* \hat{f} \Psi = \int dq \left[\Psi^* \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \Psi + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \hat{f} \Psi + \Psi^* \hat{f} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right] =$$

$$= \int dq \Psi^* \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H}) \right] \Psi$$

Лекция 6 (3 слайд)

Учитывая, что это равенство должно быть справедливо в состоянии с произвольной волновой функцией $\Psi(q,t)$, заключаем:

$$\dot{\hat{f}} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}\hat{f}]$$

Из этой формулы следует, что если оператор некоторой физической величины не зависит явно от времени и коммутирует с оператором Гамильтона, то среднее значение данной физической величины не зависит от времени в любом состоянии.

Лекция 6 (4 слайд)

Поскольку факт коммутации ряда операторов физических величин

с оператором Гамильтона следует из свойств симметрии

пространства-времени, то в квантовой механике (как и в

классической) существование ряда интегралов движения связано с симметриями пространства-времени.

Однородность времени и закон сохранения энергии.

Из однородности времени следует, что гамильтониан не зависит

явно от времени. А так как гамильтониан сам с собой коммутирует,

то энергия является интегралом движения.

Лекция 6 (5 слайд)

Однородность пространства и закон сохранения импульса.

Пространство в инерциальных системах отсчета однородно.

Значит законы движения инвариантны относительно

преобразований параллельного переноса. рассмотрим бесконечно

малую трансляцию:

$$\Psi'(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \Psi(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi' = \left(1 + \frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}\hat{\vec{P}}\right)\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t)$$

Лекция 6 (6 слайд)

И функция $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t)$, и функция $\Psi'(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t)$ удовлетворяют временному уравнению Шредингера, поэтому

$$i\hbar\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}\hat{\vec{P}}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\hat{H}\left(1+\frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}\hat{\vec{P}}\right)\Psi \quad\Rightarrow\quad \frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}\hat{\vec{P}}i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{i}{\hbar}\delta\vec{r}\hat{H}\hat{\vec{P}}\Psi$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\vec{P}}\hat{H}\Psi=\hat{H}\hat{\vec{P}}\Psi \quad\Rightarrow\quad \left[\hat{H}\hat{\vec{P}}\right]=0$$

и, следовательно, суммарный импульс системы есть интеграл движения

Лекция 6 (7 слайд)

Оператор четности $\hat{I}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$

имеет два собственных значения

это +1 и –1. Собственные функции, отвечающие собственному значению

$p = +1$ -

любые четные функции, отвечающие собственному значению

$p = -1$ -

любые нечетные. Среднее значение оператора четности в любом состоянии

$\Psi(\vec{r})$

$$\overline{p} = \int \Psi^*(\vec{r})\hat{I}\Psi(\vec{r})d\vec{r} = \int \Psi^*(\vec{r})\Psi(-\vec{r})d\vec{r}$$

четной

показывает, насколько волновая функция этого состояния близка к
или

кции.

нечетной фун

Лекция 6 (8 слайд)

Рассмотрим частицу, движущуюся в некотором потенциале $U(\vec{r})$.

Если потенциальная энергия не меняется при преобразовании инверсии, то оператор инверсии коммутирует с гамильтонианом

$\left[\hat{I}\hat{H}\right] = 0$.

В этом случае четность является интегралом движения.

В частности, если потенциальная энергия четная функция, а волновая функция частицы в начальный момент времени имеет определенную четность (является либо четной, либо нечетной функцией координат), то она останется таковой и любой последующий момент времени.

Лекция 6 (9 слайд)

В заключение этой лекции подчеркнем, что для сохранения физической величины в квантовой механики нужна независимость от времени ее среднего значения, результаты же отдельных измерений могут быть различными. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим состояние

$$\Psi(q,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}f_1(q)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}+\frac{1}{\sqrt{2}}f_2(q)e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}$$

где E_1 и E_2 - собственные значения не зависящего от времени оператора Гамильтона $f_1(q)$ и $f_2(q)$ - отвечающие им собственные функции

Лекция 6 (10 слайд)

Согласно основным принципам квантовой механики энергия в этом состоянии определенного значения не имеет, и при измерениях могут быть получены два значения E_1 и E_2 с одинаковыми вероятностями. Однако можно утверждать, что если выполнить много измерений над ансамблем тождественных квантовых систем в некоторый момент времени и усреднить эти результаты, то это среднее значение не будет зависеть от времени. Для рассматривае6мого состояния имеем

$$\overline{E} = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{E_1 + E_2}{2}$$