Лекция XI

1. Сильно вырожденный ферми - газ.

Будем рассматривать фермионы со спином, равным половине (электроны, протоны, нейтроны), когда $g = 2s + 1 = 2$. Посмотрим, как ведет себя распределение Ферми-Дирака (IX.2.2)

$$\langle n(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1} \qquad \text{(XI.1.1)}$$

как функция энергии ε при $T \to 0$. Пусть химический потенциал при заданной плотности N / V и нулевой температуре равен $\mu(0)$. Тогда распределение (XI.1.1) принимает вид ступеньки с высотой равной 1, см. рис. XI.1.

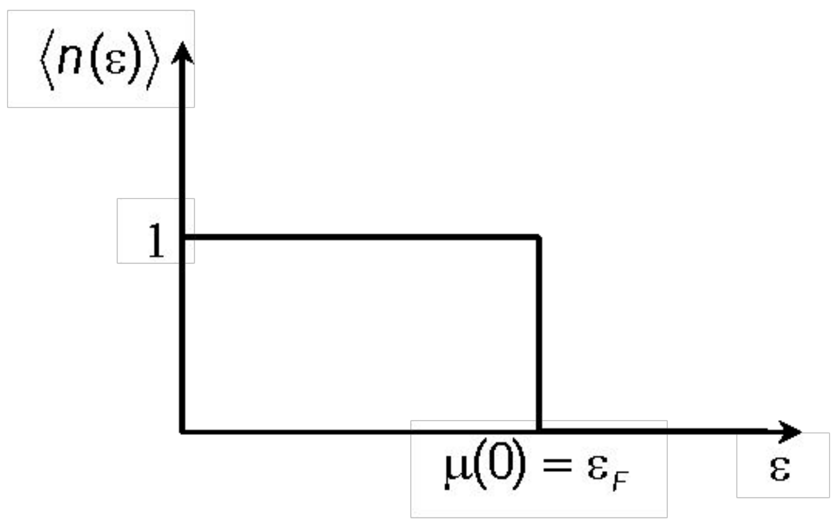

Рис. XI.1.

Таким образом, все уровни с энергией меньше или равной $\mu(0)$ заняты, а выше ее – свободны. Это граничное значение энергии называется энергией Ферми $\mu(0)=\varepsilon_F$. Поэтому полное число фермионов в объеме V равно

$$N = 2\cdot\int_0^{p_F}\frac{4\pi p^2 dp\, V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{p_F}{\hbar}\right)^3 V, \quad \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} \qquad \text{(XI.1.2)}$$

Отсюда граничный импульс – радиус ферми-сферы -

$$p_F = \hbar\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}, \qquad \text{(XI.1.3)}$$

а энергия Ферми

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad \text{(XI.1.4)}$$

Полная энергия газа равна

$$E = 2\cdot\int_0^{p_F}\frac{p^2}{2m}\frac{4\pi p^2 dp\, V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{1}{10\pi^2}\frac{V}{m\hbar^3}p_F^5 \qquad \text{(XI.1.5)}$$

или с учетом (XI.1.3) и (XI.1.4)

$$E = \frac{3}{5}\varepsilon_F N = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} N \qquad \text{(XI.1.6)}$$

Отсюда в соответствии с общей формулой (X.2.9) получаем

$$P = \frac{2}{5}\varepsilon_F \frac{N}{V} = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}, \tag{XI.1.7}$$

т.е. давление сильно вырожденного ферми-газа зависит только от концентрации частиц, но не от температуры. Условие применимости формул (XI.1.5) и (XI.1.6)

$$T << \varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = T_{выр} \tag{XI.1.8}$$

Оценим, когда можно считать плазму (т.е. газ электронов и ядер) идеальной. Пусть a – среднее расстояние между электронами и ядрами. Тогда энергия кулоновского взаимодействия электронов с ядрами, отнесенная к одному электрону, должна быть много меньше средней кинетической энергии электрона, которая имеет порядок энергии Ферми:

$$\frac{Ze^2}{a} << \varepsilon_F \tag{XI.1.9}$$

Если N – число электронов, а N/Z - число ядер (Z – заряд ядра, газ в целом электронейтрален), то $a \sim (ZV/N)^{1/3}$ и условие (XI.1.9) принимает вид

$$Ze^2\left(\frac{N}{ZV}\right)^{1/3} << \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{XI.1.10}$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{N}{V} >> \frac{Z^2}{a_B^3}, \qquad a_B = \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{XI.1.11}$$

(a_B – радиус Бора). Таким образом, чем больше плотность, тем лучше выполняется условие “идеальности” газа. Температура вырождения, соответствующая критической плотности $\frac{N}{V} = \frac{Z^2}{a_B^3}$, при которой нарушается требование идеальности (XI.1.11), равна

$$T_{выр}^{(cr)} = \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)_{(cr)}^{2/3} = Z^{4/3}\frac{e^2}{a_B} \approx Z^{4/3} \cdot 27\ эВ \sim 3 \cdot 10^5 \cdot Z^{4/3} K \sim 10^6 K \tag{XI.1.12}$$

Температура внутри Солнца $T \approx 10^7 K$, т.е. электронный газ можно считать невырожденным.

Посмотрим, что можно сказать об электронах в зоне проводимости металлов. Все щелочные металлы, а также медь, серебро и золото отдают по одному электрону с атома в зону проводимости. Если учесть, что плотность золота $\rho_{Au} = 19.3\ г/см^3$, а его молярный вес $197 г$, то плотность электронов

$$\frac{N}{V} \approx N_A \frac{19.3}{197} \approx 6 \cdot 10^{22} см^{-3} \tag{XI.1.13}$$

Примерно такая же концентрация и для других хороших проводников.

Поэтому в этом случае

$$\varepsilon_F \approx \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \cdot 6 \cdot 10^{22}\,\frac{(0.5)^3 \cdot 10^{-24}}{a_B^3}\right)^{2/3} \approx \frac{1}{5}\frac{e^2}{a_B} \approx 5\,эВ \sim 5 \cdot 10^4 K \qquad \text{(XI.1.14)}$$

Таким образом, электроны в зоне проводимости металлов при комнатной температуре $T \sim 300K$ сильно вырождены. Заметим, что скорость электронов на поверхности Ферми

$$v_F = \sqrt{2\varepsilon_F / m} \approx \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} / 10^{27}}\; см/с \sim 10^8\; см/с \qquad \text{(XI.1.15)}$$

($1эВ \approx 1.6 \cdot 10^{-12} эрг$), т.е. $v_F << c$ и электронный газ является нерелятивистским.

2. Теплоемкость вырожденного ферми-газа.

Так как энергия (XI.1.6) не зависит от температуры, для вычисления теплоемкости нужно найти следующий член разложения (X.2.8) по малому параметру $T/\varepsilon_F << 1$. Задача сводится к приближенному вычислению интеграла

$$I = \int_0^\infty \frac{f(u)du}{e^{u-\nu}+1}, \qquad \nu = \frac{\mu}{T}, \qquad f(u) = u^\lambda \qquad \text{(XI.2.1)}$$

при $\nu >> 1$. Полагая $u - \nu = z$, имеем

$$I = \int_{-\nu}^{\infty} \frac{f(z+\nu)dz}{e^z+1} = \underbrace{\int_{-\nu}^{0} \frac{f(z+\nu)dz}{e^z+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{f(z+\nu)dz}{e^z+1}}_{I_2} \qquad \text{(XI.2.2)}$$

В первом интеграле делаем замену $z = -v$ и учитываем тождество

$$\frac{1}{e^{-z}+1} = \frac{e^{z}}{e^{z}+1} = 1 - \frac{1}{e^{z}+1},$$

$$I_1 = \int_0^{\nu} \frac{f(-z+\nu)dz}{e^{-z}+1} = \int_0^{\nu} f(-z+\nu)dz - \int_0^{\nu} \frac{f(-z+\nu)dz}{e^{z}+1} \qquad \text{(XI.2.3)}$$

Переходя к переменной $u = -z + \nu$ в первом из этих интегралов, имеем

$$I = \int_0^{\nu} f(u)du - \int_0^{\nu} \frac{f(\nu - z)dz}{e^{z}+1} + \int_0^{\infty} \frac{f(\nu + z)dz}{e^{z}+1} \qquad \text{(XI.2.4)}$$

Заметим, что это точное соотношение, поскольку никаких приближений пока сделано не было. Учтем теперь, что параметр $\nu >> 1$, а второй и третий интеграл сходятся при значениях $z \sim 1$. Поскольку

$$f(\nu \pm z) = f(\nu) \pm z f'(\nu) + \ldots,$$

то интеграл (XI.2.4) приближенно равен

$$I \approx \int_0^{\nu} f(u)du + \int_0^{\infty} \frac{[f(\nu+z) - f(\nu-z)]dz}{e^{z}+1} \approx \int_0^{\nu} f(u)du + 2f'(\nu)\int_0^{\infty} \frac{zdz}{e^{z}+1} \qquad \text{(XI.2.5)}$$

Используя значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{zdz}{e^z+1} = \frac{\pi^2}{12} \tag{XI.2.6}$$

окончательно с экспоненциальной точностью получаем.

$$\int_0^\infty \frac{f(u)du}{e^{u-\nu}+1} = \int_0^\nu f(u)du + \frac{\pi^2}{6} f'(\nu) + \ldots \tag{XI.2.7}$$

Возвращаясь к поставленной задаче, найдем сначала поправку к химическому потенциалу $\mu = \nu T$, который определяется из уравнения (X.2.5) с $g = 2$

$$N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{V_Q} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}du}{e^{u-\nu}+1} \tag{XI.2.8}$$

Элементарное вычисление дает

$$N = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \nu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8}\nu^{-2}\right] \frac{V}{V_Q} \tag{XI.2.9}$$

Полагая здесь

$$\nu \equiv \frac{\mu}{T} = \frac{\varepsilon_F}{T}(1-\delta), \tag{XI.2.10}$$

и учитывая явное выражение для энергии Ферми (XI.1.4) и квантового обьема (IX.5.4), получаем

$$\delta = 1 - \frac{\mu}{\varepsilon_F} = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = \varepsilon_F\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2\right] \tag{XI.2.11}$$

Аналогично вычисляется поправка к полной энергии

$$E = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \nu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \nu^{-2} \right] T \frac{V}{V_Q} \tag{XI.2.12}$$

Подставляя сюда разложение (XI.2.10) с δ, определенной в (XI.2.11), окончательно находим

$$E = \frac{3}{5} \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right] N \tag{XI.2.13}$$

Отсюда для теплоемкости следует

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{\varepsilon_F} \cdot N = \frac{3}{2} N_{eff}, \qquad N_{eff} = \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{\varepsilon_F} \cdot N \tag{XI.2.14}$$

Эта формула удовлетворяет теореме Нернста: $C_V \to 0$ при $T \to 0$. Выражение (XI.2.14) показывает, что электронные степени свободы “вымерзают” при $T \ll \varepsilon_F$, т.е. не дают вклада в теплоемкость, в отличие от классического закона равнораспределения. Вырожденный электронный газ – существенно квантовая система.

Рассмотрим флуктуацию числа частиц n_k в k – ом квантовом состоянии. Согласно общей формуле (VIII.5.5) имеем

$$\left\langle \left(\boldsymbol{n}_k - \bar{n}_k \right)^2 \right\rangle = -T \left(\frac{\partial^2 \Omega_k}{\partial \mu^2} \right)_{T,V} = T \left(\frac{\partial \bar{n}_k}{\partial \mu} \right)_{T,V} \qquad \text{(XI.2.15)}$$

где $\bar{n}_k \equiv \langle n_k \rangle$ - среднее число заполнения k – ого квантового состояния, см. (IX.2.2), а термодинамический потенциал Ω_k определен в (IX.2.1). Простое дифференцирование дает

$$\left\langle \left(\boldsymbol{n}_k - \bar{n}_k \right)^2 \right\rangle = \bar{n}_k (1 - \bar{n}_k) \qquad \text{(XI.2.16)}$$

Максимальная флуктуация, возникающая при $\bar{n}_k = 1/2$, равна $\left\langle \left(\boldsymbol{n}_k - \bar{n}_k \right)^2 \right\rangle = 1/4$. В классическом пределе ($\bar{n}_k \ll 1$)

$$\left\langle \left(\boldsymbol{n}_k - \bar{n}_k \right)^2 \right\rangle \approx \bar{n}_k \ll 1, \qquad \text{(XI.2.17)}$$

а для сильно вырожденного ферми-газа (при $T \to 0$) она равна нулю:

$$\left\langle \left(\boldsymbol{n}_k - \bar{n}_k \right)^2 \right\rangle = 0 \qquad \text{(XI.2.18)}$$

для всех квантовых состояний: $\bar{n}_k = 1$ при $\varepsilon_k < \varepsilon_F$ и $\bar{n}_k = 0$ при $\varepsilon_k > \varepsilon_F$.

Для флуктуации полного числа фермионов в этом случае согласно (VIII.5.5) и (XI.2.9) получаем

$$\overline{N^2} - N^2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\varepsilon_F}N \qquad \text{(XI.2.19)}$$

Так что относительная флуктуация

$$\delta N = \left(\frac{\overline{N^2} - N^2}{N^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{3}{2}\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{N}} << 1 \qquad \text{(XI.2.20)}$$

мала не только за счет макроскопичности системы, но также из-за вырождения, $T << \varepsilon_F$. Изотермическая сжимаемость, см. (VIII.5.11), равна

$$\kappa_T = \overline{N^2} - N^2 = \frac{3}{2}\frac{V}{N\varepsilon_F} \propto \left(\frac{V}{N}\right)^{5/3}, \qquad \text{(XI.2.21)}$$

т.е. не зависит от температуры, а только от плотности числа частиц: чем больше концентрация, тем меньше сжимаемость, т.е. система фермионов становится более жесткой. Стабильность белых карликов и нейтронных звезд полностью связана с давлением вырожденного газа электронов и нейтронов, соответственно.