Лекция XIII

1. Черное излучение.

Черным излучением называется электромагнитное излучение, находящееся в равновесии с веществом. Поскольку электромагнитное излучение состоит из фотонов, то черное излучение – это равновесный идеальный бозе-газ: фотоны практически не взаимодействуют друг с другом (сечение взаимодействия $\sim \alpha^4$, где $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры) и являются бозонами (говорят, что спин фотона равен 1, но это не вполне точно, так как нет ни одной системы отсчета, в которой бы фотон покоился).

Равновесие фотонов с веществом устанавливается за счет их поглощения и испускания. Поэтому число частиц не фиксировано и при расчетах необходимо использовать большое каноническое распределение. Среднее число частиц при фиксированных температуре и объеме определяется из условия минимума свободной энергии $F = F(T, V, N)$, см. (V.2.14). Поэтому

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0, \qquad \text{(XIII.1.1)}$$

т.е. химический потенциал фотонов равен нулю.

Этот вывод не меняется, если считать фиксированным не объем, а давление. В этом случае

$$\mu = \left(\frac{\partial G}{\partial N} \right)_{T,P} = 0, \qquad \text{(XIII.1.2)}$$

где $G = G(T, P, N)$ - термодинамический потенциал Гиббса.

Числа заполнения n_k характеризуются квантовыми числами

$$k = \{\vec{k}, \alpha\}, \ \alpha = 1,2 \qquad \text{(XIII.1.3)}$$

Здесь $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ – волновой вектор светового кванта (фотона), а индекс α отличает два независимых состояния поляризации. Энергия каждого фотона равна

$$\varepsilon_k = \hbar\omega_k = \hbar c|\vec{k}| \equiv \hbar ck \qquad \text{(XIII.1.4)}$$

Среднее число фотонов в k - ом квантовом состоянии определяется распределением Бозе-Эйнштейна (IX.3.5) с химическим потенциалом $\mu = 0$

$$\overline{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_k}{T}} - 1} \qquad \text{(XIII.1.5)}$$

Это выражение называется распределением Планка.

При вычислении среднего числа фотонов согласно (IX.3.6), нужно сумму по квантовым состояниям заменить интегралом по фазовому пространству.

$$\sum_k \dots = \int g \frac{d^3p\,dV}{(2\pi\hbar)^3} \dots = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \dots \qquad \text{(XIII.1.6)}$$

Здесь учтено, что $g=2$, в соответствии с двумя возможными поляризациями. Поэтому среднее число фотонов, приходящихся на спектральный интервал $d\omega$ равно

$$dN_{\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} \tag{XIII.1.7}$$

Спектральная плотность энергии

$$dE_{\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} = \frac{1}{\pi^2} T \left(\frac{T}{\hbar c} \right)^3 V \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \quad x = \frac{\hbar\omega}{T} \tag{XIII.1.8}$$

называется формулой Планка, см рис. XIII.1.

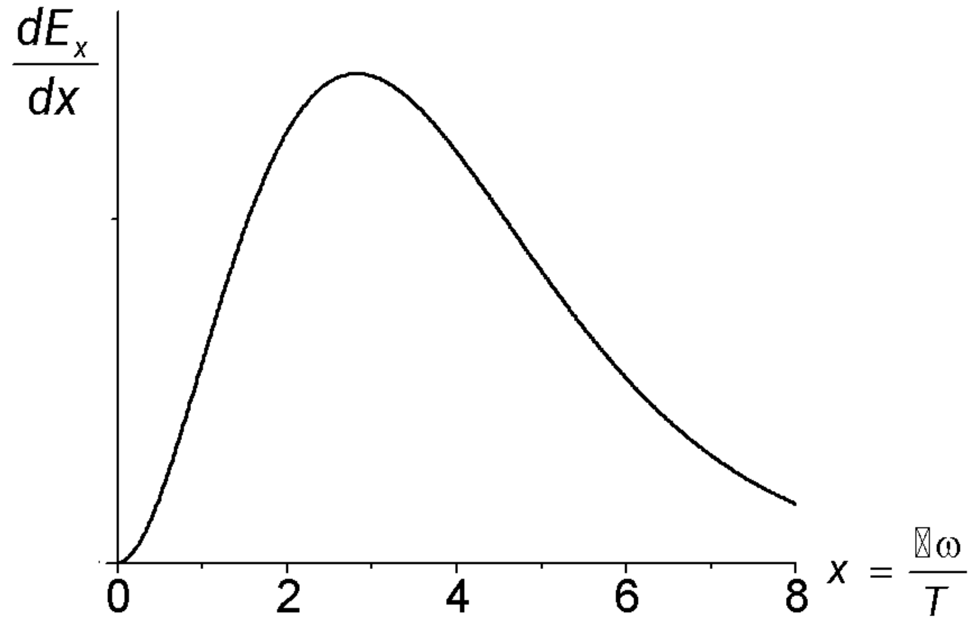

Рис. XIII.1.

Положение максимума этого распределения определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 dx}{e^x - 1}\right)_{x_m} = 0$$

и равно

$$x_m = \frac{\hbar\omega_m}{T} \approx 2.82 \tag{XIII.1.9}$$

(закон смещения Вина).

При низких частотах распределение Планка переходит в формулу Рэлея-Джинса,

$$dE_\omega = T\frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}, \qquad \hbar\omega << T, \tag{XIII.1.10}$$

которая эквивалентна закону равнораспределения: на каждую колебательную степень свободы приходится две половинки T в средней энергии. Использование этой формулы при высоких частотах приводит к “ультрафиолетовой катастрофе”.

При высоких частотах распределение Планка дает формулу Вина:

$$dE_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\hbar\omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} d\omega, \qquad \hbar\omega >> T \tag{XIII.1.11}$$

которая снимает противоречие. В 1911 году Вильгельм Вин (1864-1928) получил Нобелевскую премию “За открытие законов теплового излучения”, еще до присуждения в 1918 году Нобелевской премии Максу Планку “За открытие кванта энергии”.

2. Термодинамические функции черного излучения.

Вычисление термодинамических функций равновесного излучения упрощается из-за равенства нулю химического потенциала. Поскольку

$$F = \Omega + G = \Omega + \mu N = \Omega, \tag{XIII.2.1}$$

то согласно (IX.3.7) и (XIII.1.6) имеем

$$\begin{aligned} \Omega = F = T\frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 d\omega \ln\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right) = \frac{VT^4}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty x^2 dx \ln\left(1 - e^{-x}\right) = \\ = \frac{VT^4}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty d\left(\frac{x^3}{3}\right)\ln\left(1 - e^{-x}\right) = -\frac{1}{3}\frac{VT^4}{\pi^2\hbar^3 c^3}\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = -PV \end{aligned} \tag{XIII.2.2}$$

Сравнение этого равенства с формулой (XIII.1.8) дает

$$PV = \frac{1}{3}E \tag{XIII.2.3}$$

Это соотношение, справедливое для ультрарелятивистского газа, было использовано ранее при получении закона Больцмана (см. Лекцию VI).

Фигурирующий в (XIII.2.2) интеграл, согласно (XII.1.3) равен

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4)\zeta(4) = 3!\frac{2^3\pi^4}{4!}\left|B_4\right| = \frac{\pi^4}{15} \tag{XIII.2.4}$$

(здесь число Бернулли $B_4 = -1/30$). Закон Больцмана представляют в виде

$$E = \frac{4\sigma}{c}VT^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \approx 5.67\cdot 10^{-5}\,\frac{г}{c^3 K^4} \tag{XIII.2.5}$$

Отсюда с учетом (XIII.2.2) для свободной энергии получаем

$$F = -\frac{4\sigma}{3c} V T^4, \tag{XIII.2.6}$$

а для энтропии имеем

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{16\sigma}{3c} V T^3 \tag{XIII.2.7}$$

Теплоемкость

$$C_V = \frac{16\sigma}{c} V T^3 \tag{XIII.2.8}$$

пропорциональна T^3 во всем диапазоне температур, а не только при $T \to 0$, поскольку закон дисперсии линеен при всех импульсах.

Вычислим поток электромагнитной энергии J_0 с единицы поверхности в единицу времени, см рис. XIII.2.

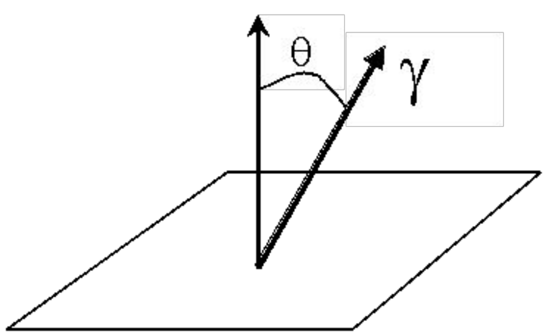

Рис. XIII.2.

$$J_0 = \int c \frac{1}{4\pi V} \frac{dE_\omega}{d\omega} \cos\theta \, d\Omega \, d\omega =$$

$$= c \frac{1}{4\pi V} \int_0^\infty \frac{dE_\omega}{d\omega} d\omega \cdot 2\pi \int_0^1 \cos\theta \, d\cos\theta =$$

$$= \frac{c}{4V} E$$

Подставляя сюда выражение (XIII.2.5) для полной интенсивности испускания черного тела получаем

$$J_0 = \sigma T^4 \tag{XIII.2.9}$$

В частности для светимости Солнца формула (XIII.2.9) дает значение

$$L_\odot = J_0 \cdot 4\pi R_\odot^2 \approx 5.67 \cdot 10^{-5} \cdot (6 \cdot 10^3)^4 \cdot 4\pi \cdot (6.96 \cdot 10^{10})^2 \, \frac{эрг}{с} \simeq 4 \cdot 10^{33} \, \frac{эрг}{с} \tag{XIII.2.10}$$

Измеренное значение светимости Солнца $3.8 \cdot 10^{33} эрг/с$. Таким образом, на каждый квадратный сантиметр земной поверхности при нормальном падении солнечных лучей попадает

$$J_0 (R_\odot / AU)^2 \approx 0.14 \; Дж/с.$$

Здесь $R_\odot = 6.96 \cdot 10^{10}$ $см$ – радиус Солнца, $AU = 1.496 \cdot 10^{13}$ $см$ – астрономическая единица длины (расстояние от Солнца до Земли).

3. Реликтовое излучение.

Плотность среднего числа фотонов в соответствии с распределением (XIII.1.7) равна

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \approx 0.244\left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3, \qquad \text{(XIII.3.1)}$$

где учтено значение дзета-функции Римана $\zeta(3) = 1.202...$

Арно Пензиас и Роберт Вильсон получили половину Нобелевской премии по физике 1978 года за открытие космического микроволнового фонового излучения (другую половину получил Петр Леонидович Капица (1894-1984) за фундаментальные изобретения и открытия в области низких температур). Существование этого излучения было предсказано теоретически Георгием Антоновичем Гаммовым еще в 1946 году в рамках модели горячей Вселенной.

Это остаточное излучение с температурой $T_r \approx 2.726\,K$, возникшее после “Большого взрыва” называется реликтовым излучением.

Согласно (XIII.3.1) в каждом кубическом сантиметре Вселенной находится ≈ 411 реликтовых фотонов:

$$\frac{N}{V} \approx 0.244\left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \approx 411\ см^{-3} \qquad \text{(XIII.3.2)}$$

Для интерпретации результата Пензиаса и Вильсона выразим формулу Планка через длину волны фотона $\lambda = 2\pi c/\omega$:

$$dE_{\lambda} = 16\pi^2 c\hbar \frac{d\lambda \cdot V}{\lambda^5\left(e^{2\pi\hbar c/\lambda T} - 1\right)} \qquad \text{(XIII.3.3)}$$

Поэтому плотность энергии фотонов, находящаяся в ящике объемом V

$$dw_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left(e^{hc/\lambda T} - 1\right)^{-1}, \qquad h = 2\pi\hbar \qquad \text{(XIII.3.4)}$$

Если размеры ящика увеличить адиабатически в f раз, то число фотонов в кубике уменьшится в f^3 раз. Энергия каждого фотона уменьшится при этом в f раз (см., например, (VI.1.2)). Таким образом, плотность энергии уменьшится в f^4 раз:

$$\tilde{d}u = \frac{du}{f^4} = \frac{8\pi\hbar c}{f^4\lambda^5} d\lambda\left(e^{hc/\lambda T} - 1\right)^{-1} = \frac{8\pi\hbar c}{\left(\tilde{\lambda}\right)^5}\tilde{d}\lambda\left(e^{\frac{hc}{\tilde{\lambda} T/f}} - 1\right)^{-1}, \qquad \text{(XIII.3.5)}$$

где $\tilde{\lambda} = \lambda f$.

Поэтому при

$$\tilde{T} = T/f \tag{XIII.3.6}$$

форма распределения Планка остается неизменной. Это соотношение сразу же следует из формулы Больцмана. Если в качестве воображаемого ящика будет служить вся Вселенная, то при ее расширении будет уменьшаться и энергия фотонов. Таким образом, если в процессе расширения фотоны вырываются из электрон-протонной плазмы при температуре рекомбинации $T_R \approx 4000K$ (см. ниже), то согласно (XIII.3.6) с тех пор линейные размеры Вселенной увеличились примерно в полторы тысячи раз.

О том, как было открыто реликтовое излучение, у нас еще будет повод поговорить при обсуждении флуктуаций физических величин.