

Лекция XV

1. Флуктуации.

До сих пор основное внимание (за редкими исключениями) было уделено вычислению средних значений различных физических величин. Однако, статистическая теория позволяет вычислить и их флуктуации (отклонение от средних), связанные с самопроизвольными переходами из более вероятных в менее вероятные состояния. Для макроскопических тел они чрезвычайно малы.

Обобщая ранее сказанное, рассмотрим сначала флуктуации в классическом случае на базе канонического распределения Гиббса. Пусть $\chi = \chi(p, q)$ - обобщенная координата, а $\varphi = \varphi(p, q)$ - соответствующая ей обобщенная сила. Тогда функция Гамильтона рассматриваемой классической системы равна

$$H = H_0 - \varphi\chi, \quad (\text{XV.1.1})$$

где H_0 - функция Гамильтона в отсутствие внешней силы. Для среднего по каноническому ансамблю значения координаты, см. (I.4.5), имеем

$$\langle \chi \rangle \equiv \bar{\chi} = \frac{\int \chi(p, q) \exp[-(H_0 - \varphi\chi)/T] dpdq}{\int \exp[-(H_0 - \varphi\chi)/T] dpdq} \quad (\text{XV.1.2})$$

Дифференцирование по силе при постоянной температуре дает

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi} \right)_T &= \frac{1}{T} \frac{\int \chi^2 \exp[-(H_0 - \varphi \chi)/T] dp dq}{\int \exp[-(H_0 - \varphi \chi)/T] dp dq} - \\
 &= \frac{1}{T} \frac{\left\{ \int \chi \exp[-(H_0 - \varphi \chi)/T] dp dq \right\}^2}{\int \exp[-(H_0 - \varphi \chi)/T] dp dq} = \\
 &= \frac{1}{T} (\overline{\chi^2} - \bar{\chi}^2) = \frac{1}{T} \overline{(\Delta \chi)^2} \equiv \frac{1}{T} (D \chi)^2,
 \end{aligned}
 \tag{XV.1.3}$$

где $\Delta \chi = \chi - \bar{\chi}$. Таким образом, для квадрата дисперсии (средней квадратичной флуктуации) и относительной дисперсии $\delta \chi = D \chi / \bar{\chi}$ получаем

$$(D \chi)^2 = T \left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi} \right)_T, \quad \delta \chi = \left\{ T \frac{1}{\bar{\chi}^2} \left(\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \varphi} \right)_T \right\}^{1/2}
 \tag{XV.1.4}$$

Классичность величины χ необходима для того, чтобы можно было дифференцировать среднее значение $\bar{\chi}$ по обычным правилам. В квантовом случае для этого требуется равенство нулю коммутатора гамильтониана H_0 и оператора χ , $[H_0, \chi]_- = 0$. Если это не так, то существенны также квантовые флуктуации. Обсудим условия, когда ими можно пренебречь.

Пусть указанный коммутатор не равен нулю

$$-i\hbar \frac{d\chi}{dt} = [H_0, \chi]_- = -i\hbar C \quad (\text{XV.1.5})$$

где C - некоторый оператор. В классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$, и мы имеем необходимое условие, при котором справедливы соотношения (XV.1.4).

В следующем по \hbar приближении оператор C следует считать c -числом, т.е. классической величиной $C = c$. Тогда коммутатор (XV.1.5) принимает вид

$$\left[H_0, \frac{\chi}{c} \right] = -i\hbar \quad (\text{XV.1.6})$$

Отсюда из сравнения с коммутатором $[P, Q] = -i\hbar$ и соотношениями неопределенностей Гейзенберга $\Delta P \Delta Q \sim \hbar$ получаем

$$\Delta H \Delta \chi \sim \hbar \chi \sim \hbar \frac{\chi}{\tau} \quad (\text{XV.1.7})$$

Здесь $\dot{\chi}$ - классическая скорость изменения χ , а τ - характерное время изменения этой величины. Квантовыми флуктуациями χ можно пренебречь, т.е. считать ее классической величиной, если $\Delta \chi / \chi \ll 1$. Это означает, что

$$\Delta H \gg \frac{\hbar}{\tau} \sim \hbar \omega, \quad (\text{XV.1.8})$$

где ω - характерная частота. Это условие необходимо для справедливости соотношений (XV.1.4).

Если в качестве обобщенной координаты рассматривать объем V , то соответствующей обобщенной внешней силой является давление, $\varphi = -P$. Тогда равенства (XV.1.4) дают

$$(DV)^2 = -T \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = TV\kappa_T, \quad \delta V = (T\kappa_T/V)^{1/2}, \quad (\text{XV.1.9})$$

где $\kappa_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T / V$, $V = \bar{V}$.

При использовании газового термометра пересчет изменения его объема на температуру производится с помощью уравнения Клапейрона:

$$dT = \frac{PdV}{N} = \frac{T}{V} dV \quad (\text{XV.1.10})$$

Предел чувствительности такого термометра получим, полагая здесь $dV = DV$ и учитывая (XV.1.9)

$$\frac{dT}{T} = \delta V = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (\text{XV.1.11})$$

поскольку изотермическая сжимаемость идеального газа $\kappa_T = 1/P$. Если, например, термометр содержит один моль газа, то $N = N_A$, и

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{\sqrt{N_A}} = \frac{1}{\sqrt{6.022 \cdot 10^{23}}} = 1.3 \cdot 10^{-12} \quad (\text{XV.1.12})$$

Это ограничение практически недостижимо, что и следовало ожидать от макроскопического прибора.

2. О «теории голубого цвета неба».

Наиболее красочным, в буквальном смысле слова, проявлением флуктуаций является хорошо известный всем с детства голубой цвет неба. Если атмосфера была бы совершенно однородной, то солнечные лучи не преломлялись, и мы видели бы абсолютно черное небо и ослепительно яркое Солнце. Однако в отдельных малых объемах происходят флуктуации плотности $\rho_m = m/v$:

$$\delta\rho_m = \delta v = \left(\frac{T \kappa_T}{V} \right)^{1/2} = \delta N = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (\text{XV.2.1})$$

см. (VIII.5.12) и (XV.1.11). Вместе с плотностью флуктуирует показатель преломления, лучи света беспорядочно преломляются, т.е. возникает его рассеяние.

Если длина падающего света λ много больше пространственных размеров флуктуаций плотности, то справедлив закон Рэлея, т.е. сечение рассеяния $\sigma_R \sim \lambda^{-4}$. Действительно, падающий свет частоты ω поляризует флуктуационные сгустки молекул воздуха и возникающий переменный во времени их дипольный момент d приводит к излучению, интенсивность которого $\propto (d)^2 \propto \omega^4$.

Поскольку для видимого света

$$0.40 \cdot 10^{-4} \text{ см} < \lambda < 0.74 \cdot 10^{-4} \text{ см} \quad (\text{XV.2.2})$$

то в объеме $v_\lambda = 4\pi\lambda^3/3$ содержится $N_\lambda > 7.2 \cdot 10^6$ молекул. Поэтому существует широкая область значений N

$$1 \ll N \ll 10^7, \quad (\text{XV.2.3})$$

для которой флуктуационный объем v можно считать макроскопическим и в то же время применима рэлеевская теория рассеяния, так как $v \ll v_\lambda$. В соответствии с ней наиболее сильно (в видимой части спектра) рассеиваются фиолетовые и синие лучи, что и приводит к голубой окраске атмосферы. Наоборот, прошедшие без рассеяния лучи Солнца обогащены красной и желтой компонентами спектра. Этим объясняется багряная окраска Солнца на восходе и закате, когда солнечные лучи проходят значительно больший путь в атмосфере, чем днем.

3. Теорема Найквиста.

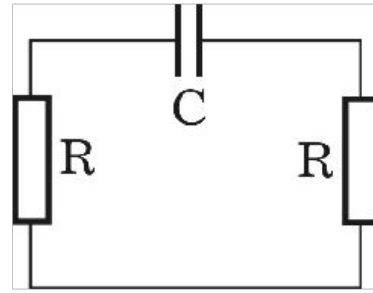


Рис. XV.1

Начнем с простого примера, см. Рис. XV.1. Заряду q на обкладках конденсатора с емкостью C , которые соединены через сопротивления R , соответствует обобщенная сила φ - разность потенциалов на обкладках. Работа, необходимая для зарядки конденсатора, равна $q\varphi$, так что первое из уравнений (XV.1.4) дает для дисперсии заряда

$$(\mathbf{D}q)^2 \equiv \overline{(\Delta q)^2} = T \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial \varphi} \right)_T = TC \quad (\text{XV.3.1})$$

Это согласуется с теоремой о равномерном распределении

$$\frac{1}{2} \frac{\overline{(\Delta q)^2}}{C} = \frac{1}{2} T, \quad (\text{XV.3.2})$$

так как средняя энергия, приходящаяся на единственную степень свободы, равна $\frac{1}{2} T$

(постоянная Больцмана равна $k_B = 1$). Этот результат устраняет сомнения в том, можно ли макроскопическую систему отождествлять с одной степенью свободы.

Рассмотрим теперь двухпроводную длинную линию (Лехерова система) с волновым сопротивлением $Z_B = \frac{1}{c} \sqrt{L^*/C^*}$, нагруженную резисторами с сопротивлением R , см. Рис.

XV.2. Здесь L^* и C^* погонные индуктивность и емкость передающей линии.

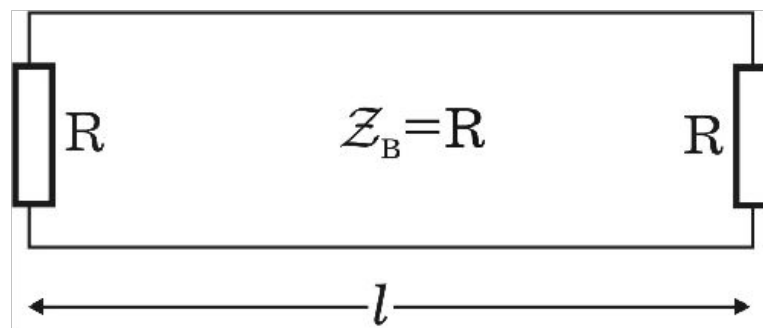


Рис. XV.2

По такой линии могут распространяться две электромагнитные моды (по одной в каждом из двух направлений) со скоростью $v = c/\sqrt{L^*C^*}$, т.е. со скоростью света в среде, заполняющую линию передачи. Для двух параллельных проводов в вакууме $L^*C^* = 1$ (поперечные размеры линии много меньше длины волны сигнала λ). Оптимальная передача энергии по линии осуществляется в режиме бегущей волны, когда она нагружена сопротивлением равным волновому: $R = Z_B = L^*/c$. С подобным типом согласования встречается каждый, кто вставляет антенный провод с согласующим устройством в гнездо антенны телевизора (оно предотвращает отражение сигнала от неоднородности линии).

Передающая линия представляет собой по существу одномерную электромагнитную полость. В тепловом равновесии по линии распространяется электромагнитное колебание с частотой ν , энергия которого в соответствии с распределением Планка равна

$$E_\nu = h\nu \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{h\nu/T} - 1} \right\} = \frac{h\nu}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{h\nu}{2T} \right) \quad (\text{XV.3.3})$$

Время распространения сигнала по линии $\tau = l/c$, поэтому каждая мода занимает частотный интервал $\frac{1}{\tau} = \frac{c}{l}$. Пусть $\Delta\nu$ - полоса пропускания, т.е. ширина области частот, в пределах которой измеряются флуктуации напряжения. Тогда в этой полосе укладывается $\Delta\nu\tau = \Delta\nu l/c$ мод, полная энергия которых $2E_\nu\Delta\nu\tau$, а скорость передачи энергии по линии в одном направлении равна

$$E_\nu\Delta\nu = \frac{h\nu}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{h\nu}{2T} \right) \Delta\nu \quad (\text{XV.3.4})$$

Мощность, подводимая к резистору с сопротивлением R должна равняться $\overline{I^2}R$. Поскольку напряжение на резисторе $\varphi = 2Rl$, где I - сила тока, то равенство (XV.3.4) дает

$$\overline{\varphi^2} = 2R h\nu \operatorname{cth} \left(\frac{h\nu}{2T} \right) \Delta\nu \quad (\text{XV.3.5})$$

Отсюда при $h\nu \ll T$ следует теорема Найквиста в ее первоначальной форме: обусловленное тепловыми флуктуациями среднее значение квадрата напряжения на резисторе с сопротивлением R , находящимся в состоянии теплового равновесия при температуре T , равно

$$\overline{\varphi^2} = 4k_B R T \Delta\nu, \quad (\text{XV.3.6})$$

где $\Delta\nu$ - полоса частот, внутри которой измеряются флуктуации напряжения.

Интересно отметить, что с помощью формулы Найквиста (XV.3.6) Джонсон определил постоянную Больцмана k_B с погрешностью в пределах 8%. При этом экспериментальная работа

J.B. Johnson, Phys. Rev. **32**, 97 (1928),

была опубликована чуть раньше, чем теоретическая

H. Nyquist, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).

Заметим, наконец, что если убрать один из резисторов, то длинная линия становится передающей антенной, если другой резистор заменить генератором, и приемной антенной, если его заменить приемником.

4. Об открытии космического фона микроволнового излучения.

В 1965 г. сотрудники компании Белла будущие нобелевские лауреаты Арно Пензиас и Роберт Вилсон обнаружили слабый фоновый сигнал на длине волны $\lambda = 7.35\text{ см}$. С помощью 20 футовой рупорной антенны в Холмделе в штате Нью-Джерси они, начиная с 1964 г., устанавливали связь со спутником «Эхо».

На приемную антенну всегда кроме «полезного» сигнала воздействуют шумы. Результаты измерения фонового излучения, т.е. потока энергии, принятой в единицу времени единичной площадкой в единичном телесном угле и в единичном интервале частот, выражают через эквивалентную температуру черного тела $T_\gamma(\nu)$, см. (XIII.1.8),

$$\phi_\gamma(\nu) d\nu = \frac{cdE_\nu}{4\pi V} = \frac{2h\nu^3 d\nu}{c^2 \left(e^{h\nu/T_\gamma(\nu)} - 1 \right)}. \quad (\text{XV.4.1})$$

Для черного излучения температура T_γ не зависит от частоты ν . В радиотехнике, т.е. в низкочастотном рэлей-джинсовском режиме, вводят шумовую температуру приемной антенны:

$$\phi_\gamma(\nu) d\nu = \frac{cdE_\nu}{4\pi V} = T_a \frac{2\nu^2 d\nu}{c^2}, \quad h\nu \ll T_a \quad (\text{XV.4.2})$$

Величина T_a обусловлена как собственными шумами самой антенны, так и внешним радиоизлучением Земли, атмосферы и космического пространства.

В экспериментах Пензиаса и Вилсона температура антенны описывалась выражением

$$T_a(\theta) = (4.4 + 2.3 \sec\theta), \quad (\text{XV.4.3})$$

где θ - угол между осью антенны и зенитом. Толщина атмосферы, рассматриваемая как плоская пластина, вдоль луча антенны пропорциональна $\sec\theta$. Поэтому второе слагаемое в (XV.4.3), зависящее от угла θ можно приписать излучению атмосферы. Еще 0.9K получалось по оценкам вклада омических потерь в антенне и излучению Земли, попадающего на боковые стенки антенны. Чистая температура антенны 3.5K оставалась на долю микроволнового фона. Поскольку $h\nu \approx 0.2\text{K} \ll 3.5\text{K}$, она является также и эквивалентной температурой черного тела.

$$T_{\gamma_0}(7.35\text{cm}) = (3.5 \pm 1)\text{K} \quad (\text{XV.4.4})$$

Этот результат, являющийся, по-видимому, наиболее важным в космологии с тех пор, как Хаббл открыл связь между красным смещением и расстоянием, был опубликован под скромным названием «измерение избыточной температуры антенны на частоте 4080МГц», Penzias A.A., Wilson R.W., Ap. J., **142**, 419 (1965). В опубликованной непосредственно здесь же статье Dicke R.H., Peebles P.J.E., Roll P.G., Wilkinson D.T., Ap.J., **142**, 414 (1965) объяснялось фундаментальное значение этого измерения. Забавно, что в отличие от пары Джонсона и Найквиста, в этом случае теоретическая работа предшествовала экспериментальной.

В настоящее время температура реликтового излучения измерена с высокой точностью

$$T_{\gamma 0} = (2.726 \pm 0.005) K , \quad (\text{XV.4.4})$$

причем, просканирована различными методами существенная часть планковского распределения в области $0.054 \leq \lambda \leq 73.5 \text{ см}$. Измерена также скорость Солнца относительно космического фонового излучения

$$v_{\oplus} = (369.5 \pm 3.0) \text{ êi} / \text{с} \quad (\text{XV.4.5})$$

(оно движется с этой скоростью в направлении созвездия Льва). Этот результат демонстрирует изотропию реликтового излучения.