1.6. Квантовые многочастичные задачи

Одномерный гармонический осциллятор. Поле смещений в струне

Одномерный гармонический осциллятор

- Уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi,$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

- <u>Решение задачи</u>
- Спектр системы:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- Волновые фун

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} H_n(z) e^{-z^2/2}; \quad z = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

- $H_n(z)$ – полиномы Эрмит

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$$

- Волновые функции осциллятора удовлетворяют уравнению

$$\Psi_n'' + (\lambda_n - z^2)\Psi_n = 0; \quad \lambda_n = \frac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n + 1$$

Одномерный гармонический осциллятор

- Введем безразмерные операторы:

$$\hat{Q} = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar}, \;\; \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}; \quad P = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial Q}$$

- Коммутационное соотношение для новых операторов:

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = \frac{1}{\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] = -i$$

- Гамильтониан в новых операторах:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\right)$$

- Операторы рождения и уничтожения:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} - i\hat{P}\right), \;\; \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} + i\hat{P}\right)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$$

- Уравнение Шредингера в новом представлении:

$$\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\Psi = \varepsilon\Psi;$$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right); \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$$

Одномерный гармонический осциллятор

- Действие новых операторов на волновые функции:

$$a^{+}\Psi_{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon + \frac{1}{2}}\Psi_{\varepsilon+1}; \quad a\Psi_{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon - \frac{1}{2}}\Psi_{\varepsilon-1}$$

- Спектр одномерного гармонического осциллятора эквидистантен:

$$E_n = \hbar\omega\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

- Волновые функции:

$$a^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q - \frac{\partial}{\partial Q}\right); \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q + \frac{\partial}{\partial Q}\right)$$

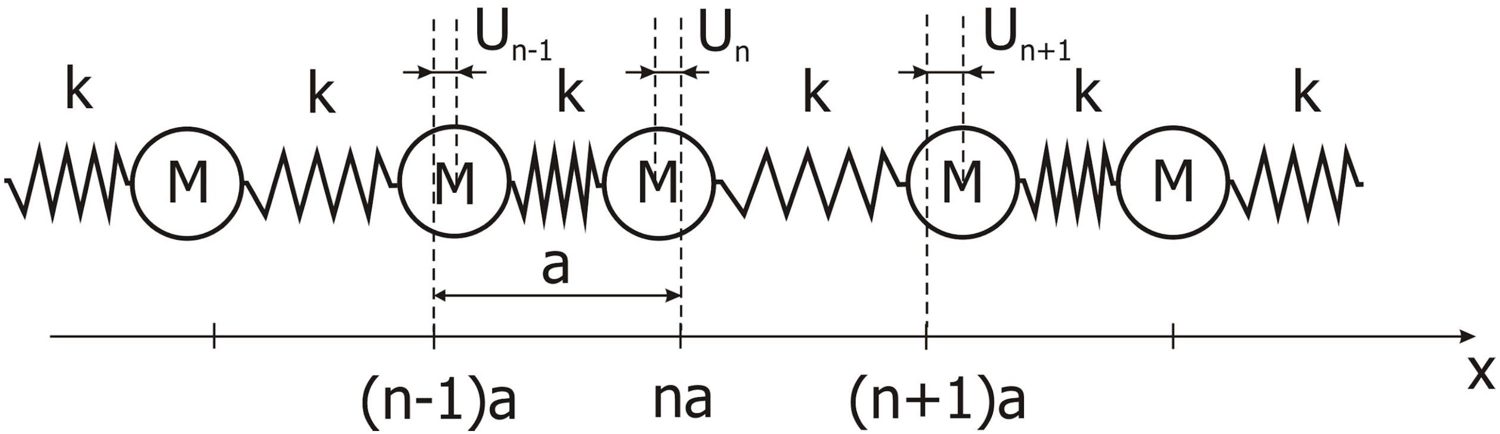
$$\Psi_0 = \pi^{-1/4}e^{-Q^2/2}$$

$$\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\left(Q - \frac{\partial}{\partial Q}\right)^n e^{-Q^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(Q)e^{-\frac{Q^2}{2}}$$

- Полученные правила действия операторов, а также коммутационные соотношения между ними, в точности совпадают с правилами действия и коммутаторами для операторов рождения и уничтожения в случае статистики Бозе

Поле смещений в струне

- Для вывода уравнений движения и гамильтониана удобно сначала использовать дискретную модель и представить колебания в струне как колебания в периодической цепочке атомов, связанных упругими силами, т.е. в *поле упругих волн* – звуковых колебаний, а затем перейти в непрерывный предел



- Уравнение движения:

$$M\ddot{U}_n = -k(U_n - U_{n-1}) + k(U_{n+1} - U_n) = k(U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n)$$

Поле смещений в струне

- Переход к непрерывному пределу:

$$U_{n+1} = U(x_n + a) = U(x_n) + U'(x_n)a + \frac{1}{2}U''(x_n)a^2;$$

$$U_{n-1} = U(x_n - a) = U(x_n) - U'(x_n)a + \frac{1}{2}U''(x_n)a^2$$

- Уравнение движения имеет вид волнового уравнения:

$$M\ddot{U}(x) = ka^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

- Плотность, модуль упругости и скорость звука:

$$\rho\ddot{U}(x) = G\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \quad c^2 = \frac{G}{\rho}$$

- Гамильтониан системы – сумма кинетической и потенциальной энергий атомов:

$$H = a\sum_n \left[\rho\frac{\dot{U}_n^2}{2} + G\frac{(\partial U_n/\partial x)^2}{2}\right] = \int dx \left[\rho\frac{\left(\dot{U}(x)\right)^2}{2} + G\frac{(\partial U/\partial x)^2}{2}\right]$$

Поле смещений в струне

- Фурье-компоненты смещений по координате:

$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k U(k,t)e^{ikx}$$

- Гамильтониан в импульсном представлении:

$$H=a\sum_k\left[\rho\frac{\dot{U}(k,t)\dot{U}^*(k,t)}{2}+Gk^2\frac{U(k,t)U^*(k,t)}{2}\right]$$

- Зависимость от времени фурье-компонент смещений:

$$U(k,t)=U(k)e^{-i\omega_k t}+U^*(-k)e^{i\omega_k t};$$
$$U(x,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k\left[U(k)e^{ikx-i\omega_k t}+U^*(k)e^{-ikx+i\omega_k t}\right].$$

- Обобщенные координаты и импульсы:

$$Q(k,t)=U(k,t);$$
$$P(k,t)=\rho\dot{Q}(k,t)$$

Поле смещений в струне

- Гамильтониан в обобщенных координатах:

$$H = \sum_k \left[\frac{P_k P_{-k}}{2\rho} + \left(\frac{\rho \omega_k^2}{2} \right) Q_k Q_{-k} \right]$$

- Уравнения Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{Q}_{-k} = \dfrac{\partial H}{\partial P_k}; \\ \dot{P}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial Q_{-k}} \end{cases}$$

- Операторы рождения и уничтожения:

$$a_k(t) = \sqrt{\frac{\rho \omega_k}{2\hbar}} Q_k(t) + i \frac{P_k(t)}{\sqrt{2\rho \omega_k \hbar}};$$

$$a_k^+(t) = \sqrt{\frac{\rho \omega_k}{2\hbar}} Q_{-k}(t) - i \frac{P_{-k}(t)}{\sqrt{2\rho \omega_k \hbar}}$$

Поле смещений в струне

- Гамильтониан в новом представлении:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right)$$

- Гамильтониан системы представляется как сумма энергий гармонических операторов
- Выражения для смещений в новом представлении:

$$U(k,t) = Q(k,t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega_k}}\left(a_k(t) + a_{-k}^+(t)\right);$$

$$U(x,t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho L\omega_k}}\left(a_k(t)e^{ikx} + a_k^+(t)e^{-ikx}\right)$$