2.3. Случайные распределения

Метод обратной функции. Метод фон Неймана. Распределение Пуассона. Нормальное распределение. Почти линейное распределение. Двумерные распределения

Вероятность в физике

- Понятие вероятности является одним из ключевых в квантовой физике
- Современное описание квантовых систем имеет исключительно вероятностный характер
- Три фундаментальных расп
- Распределение Больцмана: $\rho(E) = e^{-\frac{E-\mu}{T}}$
- Распределение Ферми – Ді
$$\rho(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} + 1}$$
- Распределение Бозе – Эйн
$$\rho(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{T}} - 1}$$
- При численном моделировании квантовых систем часто возникает необходимость получать случайные величины с заданным законом распределения, причем существенным моментом при этом является эффективность алгоритма с точки зрения временных затрат

Метод обратной функции

- Функция распределения случайной величины:

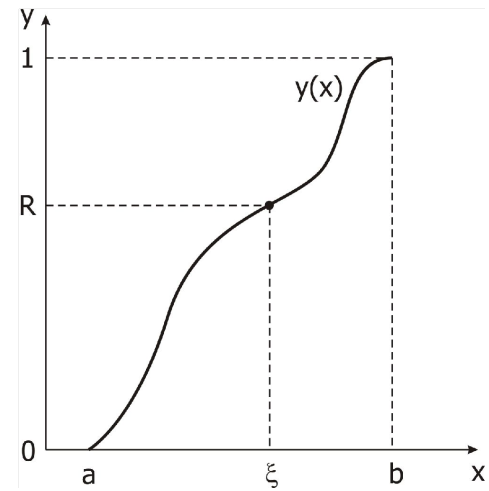
$$F(x) = P\{\xi \leq x\}$$

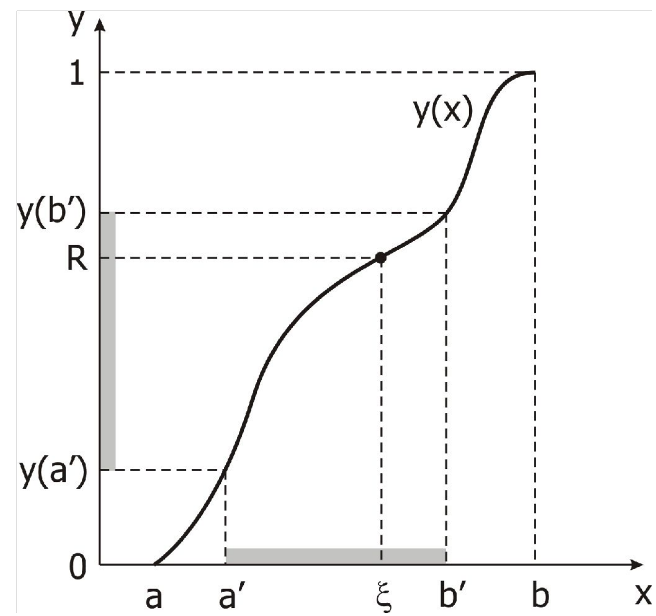
- Плотность распределения:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

- Пусть существует обратная функция $F^{-1}(y)$, такая, что если $0<y<1$, то $y=F(x)$ тогда и только тогда, когда $x=F^{-1}(y)$. Тогда искомое распределение с плотностью $f(x)$ (R равномерно распределено на $(0,1)$):

$$\xi = F^{-1}(R)$$





Пример. Экспоненциальное распределение

- Функция распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

- Плотность распределения:

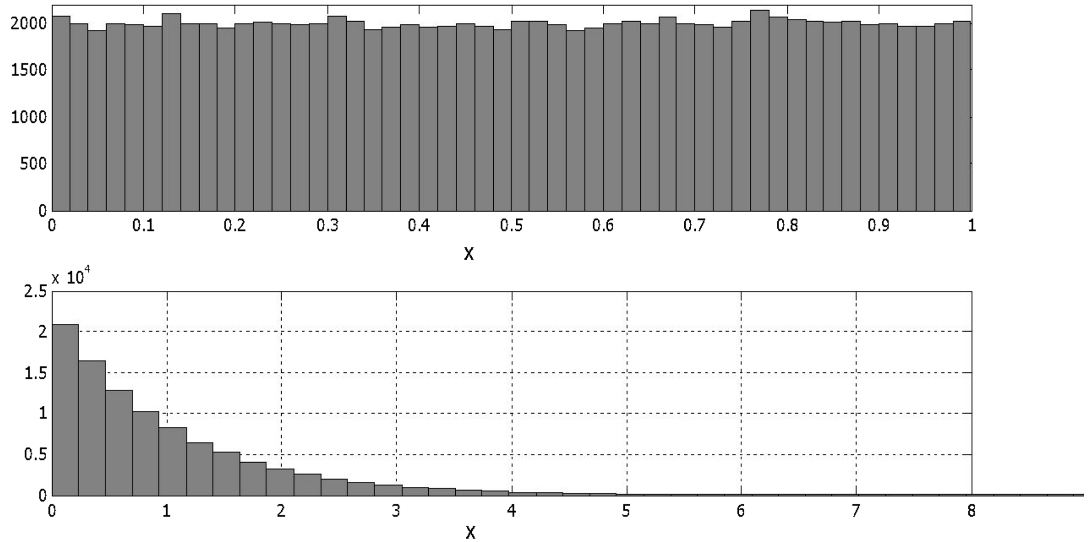
$$f(x) = e^{-x}$$

- По методу обратной функции получаем:

$$y = F(x) = 1 - e^{-x}; \quad x = F^{-1}(y) = -\ln(1 - y)$$

- Окончательно:

$$\xi = -\ln(1 - R)$$

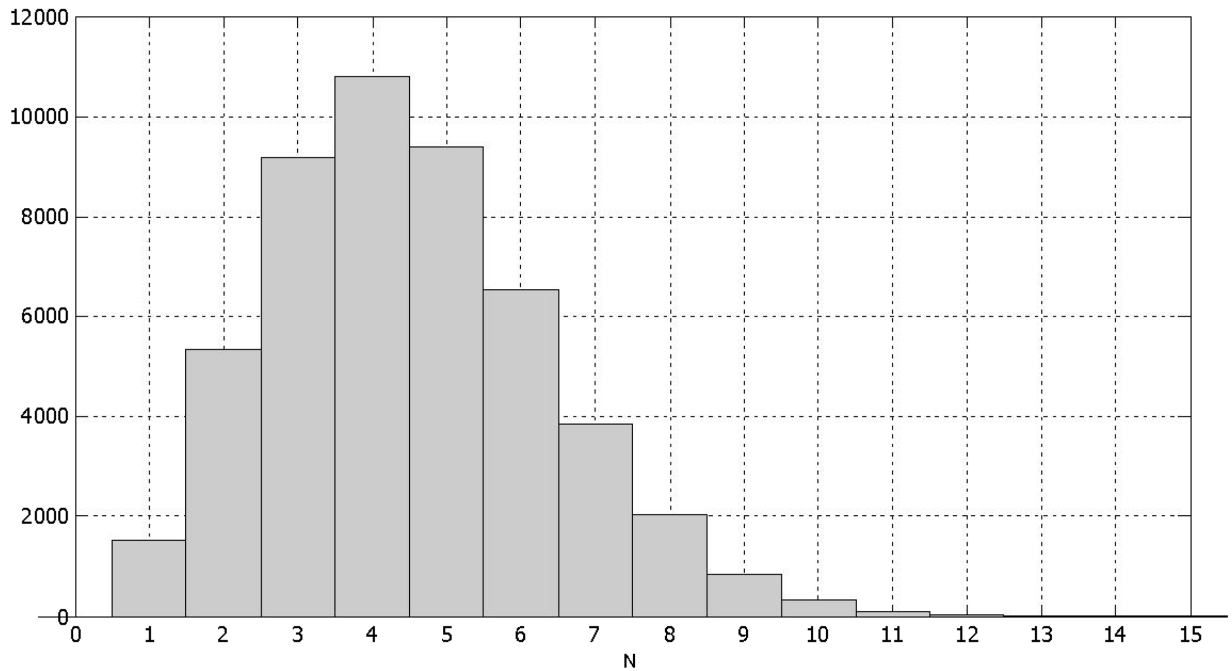


Распределение Пуассона

- Распределение Пуассона характеризует число реализаций в единицу времени событий, каждое из которых может произойти в любой момент

$$P\{\xi = m\} = \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!};$$

$$M(\xi) = \langle \xi \rangle = \mu; \quad D(\xi) = \mu$$



Распределение Пуассона

- Блок-схема алгоритма получения случайных чисел, распределенных по закону Пуассона

Метод фон Неймана

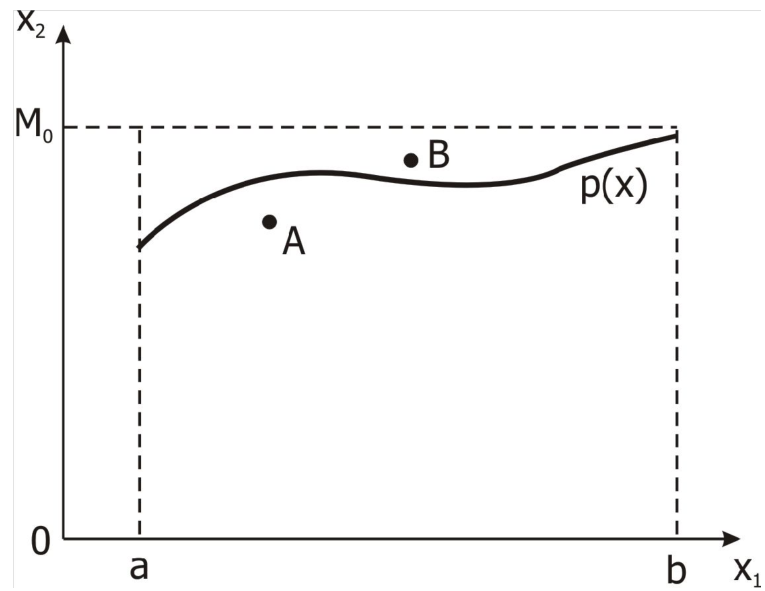
- Случайная величина ξ определена на интервале (a,b), и ее плотность распределения ограничена:

$$P(x) \le M_0$$

- Генерируются два случайных числа R_1, R_2, равномерно распределенные на (0,1), и строится точка на плоскости с координатами $x_1 = a + R_1(b-a);\quad x_2 = R_2 M_0$

- Если эта точка лежит ниже кривой y=p(x), то искомое число найдено: $\xi = x_1$

- Если точка лежит выше кривой, сгенерированная пара отбрасывается



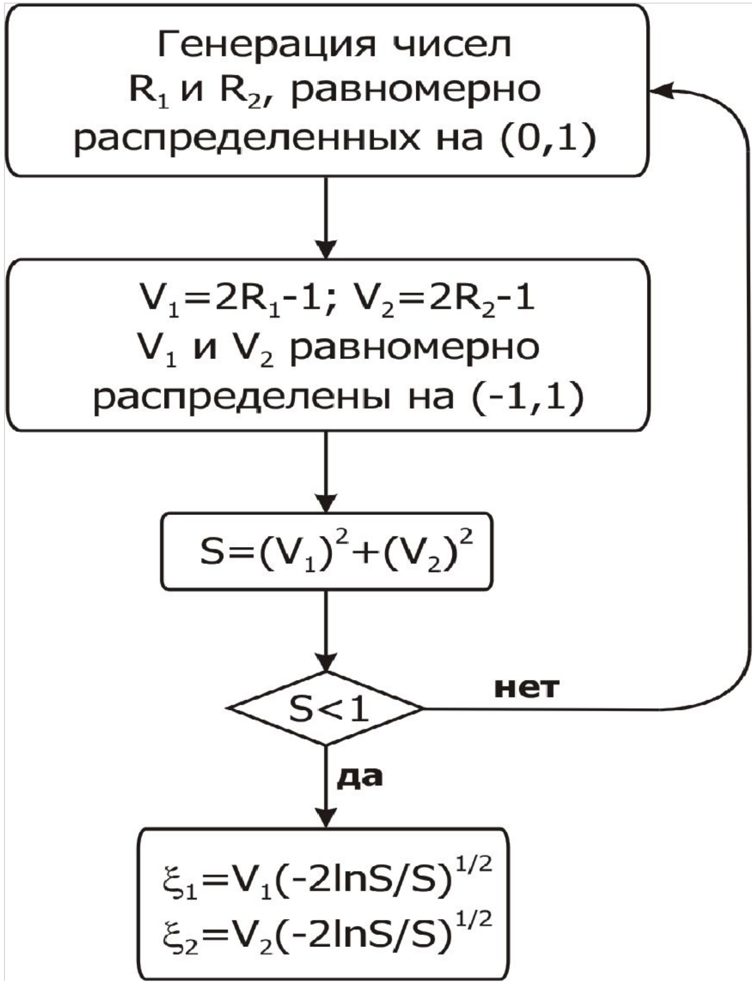
Нормальное распределение

- Нормальный закон распределения случайных величин, часто также называемый законом Гаусса, играет исключительно важную роль в физике. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов распределения, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при достаточно часто встречающихся типичных условиях
- Сумма достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежестких ограничений), приближенно подчиняется нормальному закону
- Нормальный закон рас

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

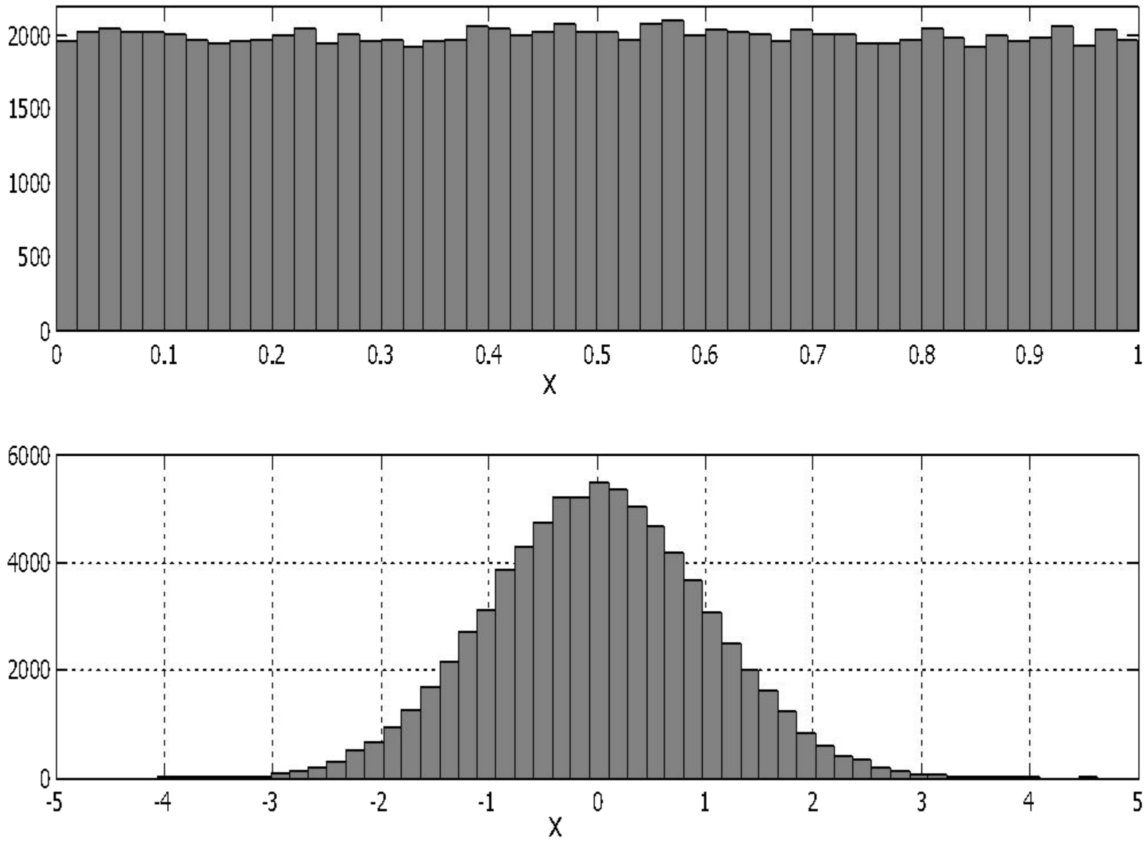
Нормальное распределение

- Блок-схема алгоритма получения нормально распределенных случайных чисел



Нормальное распределение

- Гистограмма нормально распределенных случайных величин, полученная из равномерного распределения при помощи алгоритма:



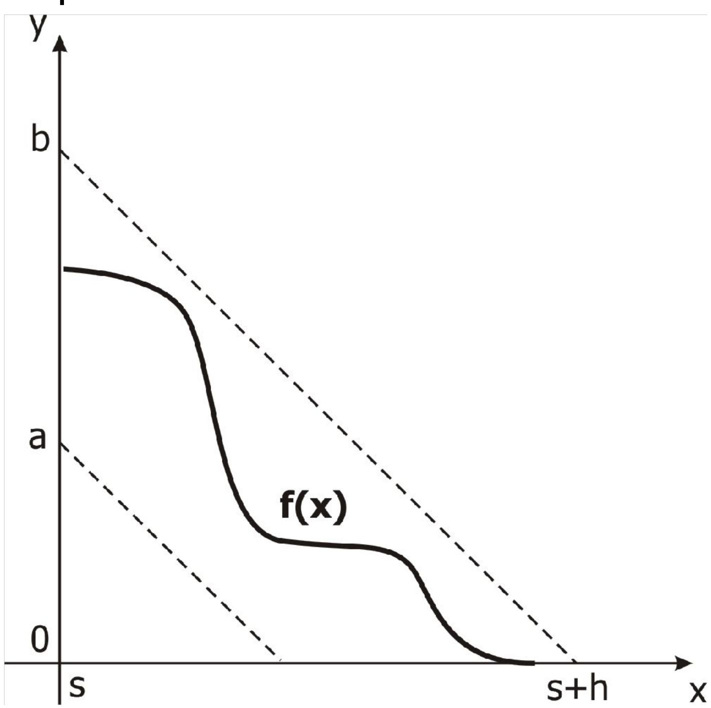
Почти линейное распределение

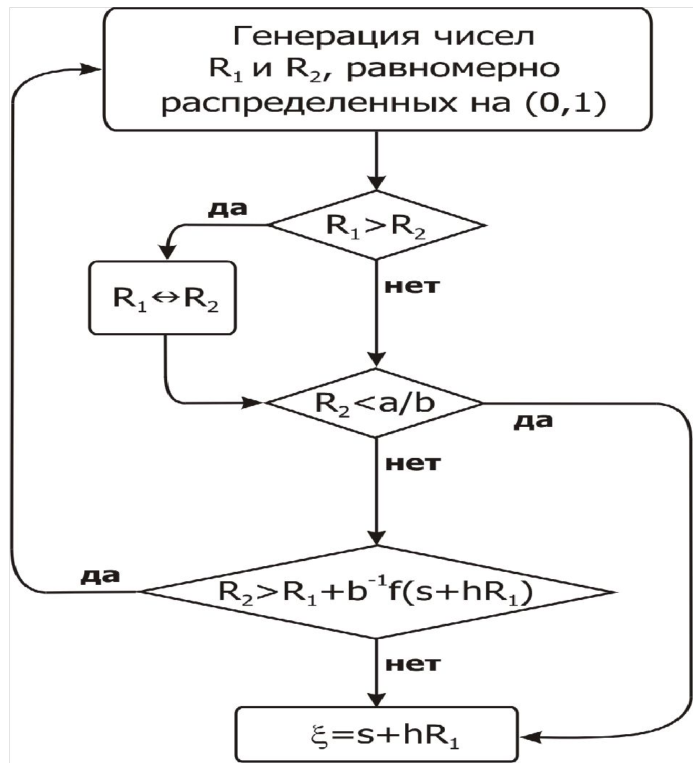
- Плотность распределения:

$$f(x) = 0, \text{ если } x < s \text{ или } x > s + h;$$

$$a - \frac{b(x-s)}{h} \le f(x) \le b - \frac{b(x-s)}{h}, \text{ если } s \le x \le s + h$$

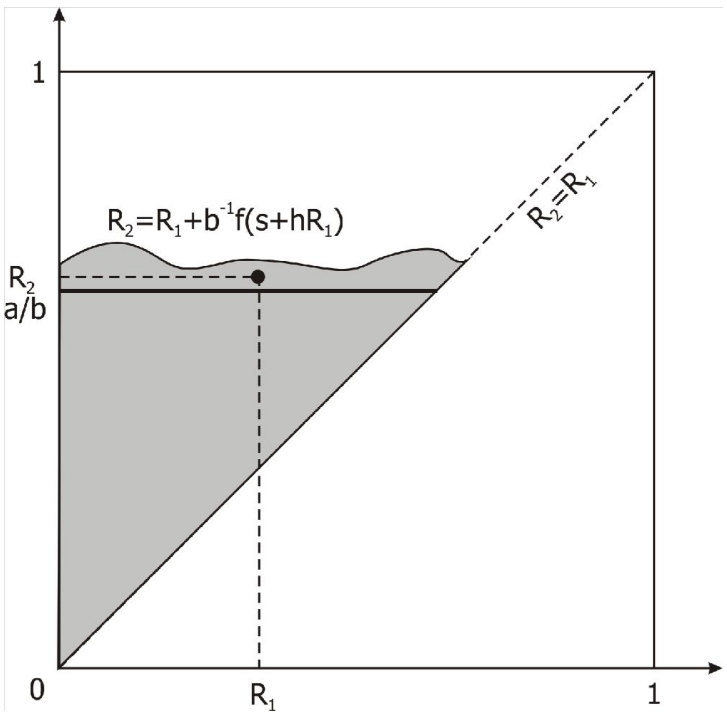
- Почти линейному распределению удовлетворяет целый класс функций

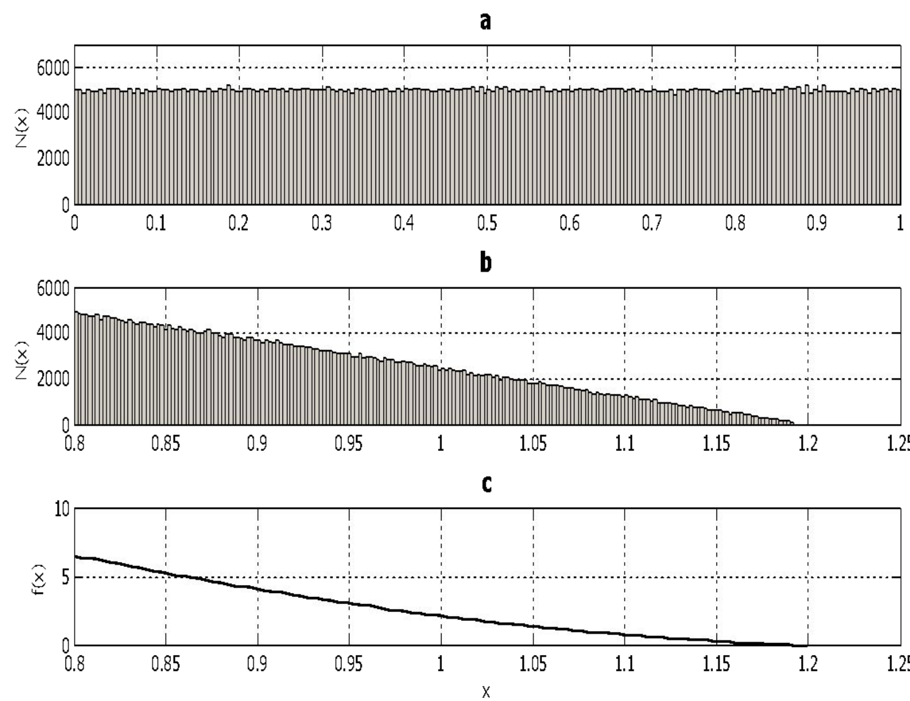




Почти линейное распределение

- Все точки, попадающие в процессе работы алгоритма в закрашенную область, имеют почти линейную плотность





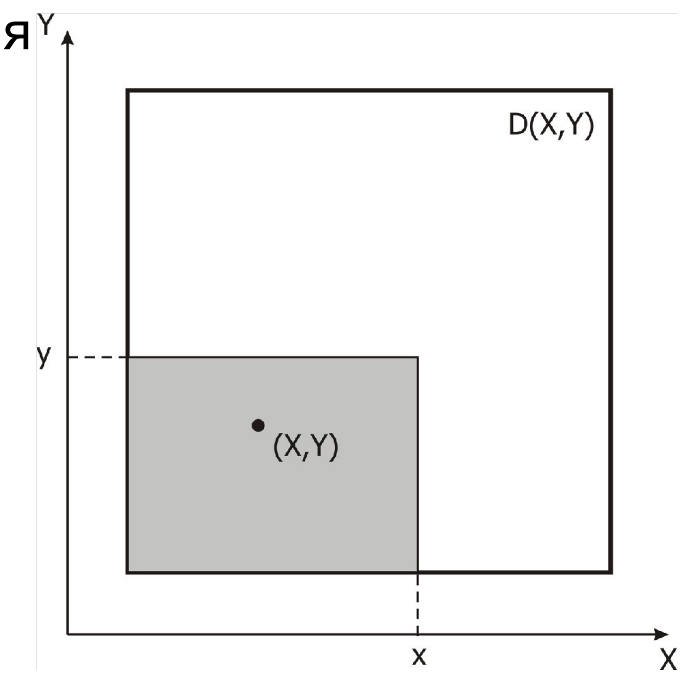
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2-x^4} - \pi^{-3}}{0.488}, & \text{если } 0.8 \le x < 0.192; \\ 0, \ \text{если } 1.192 \le x \le 1.25 \end{cases}$$

Двумерные распределения

- Совокупность двух случайных величин (X,Y), рассматриваемых совместно, называется *системой случайных величин*. Система двух случайных величин (X,Y) геометрически интерпретируется как случайная точка с этими координатами на плоскости xy
- Функция распределения системы двух случайных величин:

$$F(x,y) = P\{(X < x)\cap(Y < y)\}$$

- Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X,Y) в закрашенную область, ограниченную снизу и слева только областью определения случайных величин X и Y:



Двумерные распределения

- Плотность распределения системы двух случайных величин:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y}$$

- Функция распределения системы случайных величин:

$$G(z) = \iint_{D(z)} f(x,y)dx\,dy; \quad z = g(X,Y); \; D(z): g(x,y) < z$$

- Пример

$$f(x,y) \sim e^{x-y}; \quad 0 \le x < y \le 1$$

- Сначала генерируем случайную величину

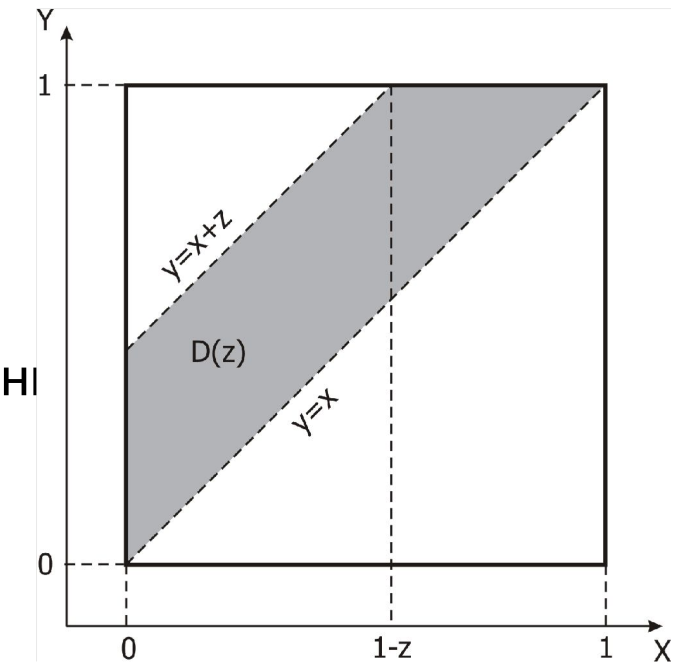
$$z = y - x; \quad D(z): \; y - x < z$$

- Функция распределения случайной величины

$$G(z) = ze^{1-z}$$

- По методу обратной функции:

$$ze^{1-z} = R_1$$



Двумерные распределения

- Закон распределения случайной величины x при заданном z:

$$f(x)_{|z=y-x} = \int_0^x dx \int_0^1 dy\, e^{-z} \sim \int_0^x dx$$

- Случайная величина x распределена равномерно на интервале (0,1–z)
- Искомая система случайн $x = R_2(1 - z);$

$$y = z + x = z + R_2(1 - z)$$

- R_1, R_2 – *независимые* случайные величины, распределенные равномерно на (0,1)
- Вдоль линий y–x=const распределение, с точностью до статистического разброса, является равномерным
- Для генерации двумерных распределений случайных величин справедлив и метод фон Неймана

Двумерные распределения