2.15. Критерии фазовых переходов

Особенности одномерной ситуации.
Понятие о ренормализационной группе.
Теоретические исследования
критических точек в бозонной модели
Хаббарда

Ренормализационный анализ

- В асимптотическом пределе больших размеров системы модель Бозе – Хаббарда можно также аналитически исследовать с помощью ренормгруппового анализа
- После преобразования гамильтониана в длинноволновом пределе в d-мерном случае к d+1-мерному эффективному гидродинамическому действию в терминах сверхтекучей плотности, сжимаемости и фазы, возможно применение процедуры ренормирования. Она заключается в последовательном увеличении масштабов рассматриваемой системы с учетом мелкомасштабных корреляций предыдущей итерации эффективной перенормировкой взаимодействия
- Тогда появляется возможность построения рекуррентных соотношений, которые в термодинамическом пределе можно записать в дифференциальной форме

Ренормализационный анализ

- Ренормализационная процедура справедлива, если характерные корреляционные длины велики или сравнимы с масштабом системы, что выполняется в присутствии дальнего недиагонального порядка (например, при наличии сверхтекучих корреляций)
- После процедуры перенормировки имеем дифференциальные соотношения, определяющие поведение макроскопических параметров системы от ее размера
- В соизмеримой ситуации в отсутствии беспорядка получаются следующие ренормгрупповые уравнения:

$$\begin{cases} dK/d\lambda = w^2 \\ dw/d\lambda = (2 - p^2/K)w \end{cases}$$

$$K = 1/\pi\sqrt{\rho_s k}$$

Ренормализационный анализ

- Критическое значение (особая точка уравнений) ***K=1/2*** (для соизмеримой бозе-модели ***p=1***) соответствует в термодинамическом пределе переходу “сверхтекучесть – моттовский изолятор”
- Уравнения не зависят от конкретного вида взаимодействия в гамильтониане, они справедливы и для “hard-core”- и для “soft-core”- бозонов в соизмеримой ситуации
- Уравнения совпадают с соответствующими ренормгрупповыми уравнениями двумерной XY- модели, поэтому вблизи фазового перехода должно наблюдаться типичное костерлиц-таулессовское поведение моттовской щели:

$$\Delta \sim \exp\left\{-b\left[1-(t/U)/(t/U)_c\right]^{-1/2}\right\}$$

Ренормализационный анализ

- Знание точной зависимости макроскопического параметра ***K*** от размеров системы играет очень важную роль для численных методов, где эта информация может позволить приблизиться к реальным макроскопическим масштабам и корректно оценить критические значения модели
- Фазовый переход “сверхтекучесть – бозе-стекло” в разупорядоченной бозонной цепочке описывается другой парой ренормгрупповых уравнений:

$$\begin{cases} dK/d\lambda = Kw^2 \\ dw/d\lambda = (3/2 - 1/K)w \end{cases}$$

- Критическое значение параметра ***K*** в этом случае другое : ***K = 2/3***

Численное моделирование

- Из макроскопической теории следует, что мезоскопическое поведение системы в области фазового перехода универсально (например, подчиняется РГ-уравнениям), только неизвестны конкретные значения соответствующих макроскопических параметров (например, параметра ***K***)
- Предлагается способ наблюдать это мезоскопическое поведение численно, фиксируя эти неизвестные параметры, и используя макроскопическую теорию для экстраполяции результатов на большие системы (в конечном итоге на бесконечные) для получения критических параметров гамильтониана
- Исследуем переход “сверхтекучесть – моттовский изолятор“ для соизмеримой системы
- Этот подход позволяет описать также фазовый переход “сверхтекучесть – бозе стекло” для разупорядоченной системы (не обязательно соизмеримой), описываемый РГ-уравнениями

Численное моделирование

- Рассмотрим еще раз РГ-уравнения для одномерной сверхтекучей жидкости в соизмеримой системе:

$$\begin{cases} dK / d\lambda = w^2 \\ dw / d\lambda = (2 - p^2 / K)w \end{cases}$$

- Используем первый интеграл уравнений (*):

$$Q\left(\frac{2K(\lambda_1)}{p^2}, \frac{2K(\lambda_2)}{p^2}, c\right) = 4(\lambda_2 - \lambda_1)$$

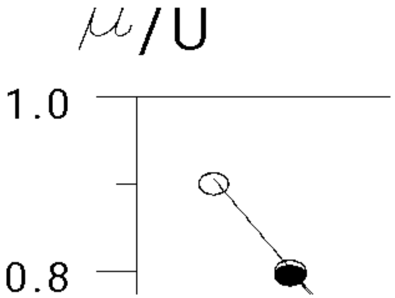
$$Q(a,b,c) = \int_a^b \frac{dx}{x - \ln x - c}$$

- Чтобы определить критические параметры гамильтониана, необходимо найти такую их комбинацию, которая удовлетворяет соотношению (*) при ***c=1***
- Задача сводится к методу деления отрезка пополам вплоть до локализации критического параметра с необходимой точностью

Численное моделирование

- Для макроскопической системы анализ критических точек возможен только с помощью квантовых алгоритмов Монте-Карло
- Цепочка с числом узлов $N_a = 50$ уже достаточна для оценки термодинамического значения критической величины $(t/U)_c$, при которой в соизмеримой системе происходит переход из диэлектрического в сверхтекучее состояние. Вблизи критической области наблюдается характерное костерлиц-таулессовское поведение диэлектрической щели
- Наблюдается сужение моттовской щели при увеличении размера системы
- Точка перехода локализована в диапазоне $0.294 < t/U < 0.315$

Численное моделирование



Численное моделирование