СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Случайными величинами называются величины, которые в результате опыта принимают те или иные значения, причем неизвестно заранее, какие именно.

Обозначают: X,Y,Z

Примером случайной величины может служить:

) Х – число очков, появляющееся при бросании игральной кости

2) У – число выстрелов до первого попадания в цель

3) Рост человека, курс доллара, выигрыш игрока и т.д.

Случайная величина, принимающая счетное множество значений называется дискретной.

Если множество значений с.в. Несчетно, то такая величина называется непрерывной.

- Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, которая каждому элементарному событию W ставит в соответствие число X(w), т.е. X=X(w), $W \in \Omega$
- *Пример*: Опыт состоит в бросании монеты 2 раза. На пространстве элементарных событий $\Omega\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ где W_1=ГГ, W_2=ГР, W_3=РГ, W_4=РР. Можно рассмотреть с.в. X – число появления герба. X является функцией от элементарного события W_2: $X(W_1)=2$, $X(W_2)=1$, $X(W_3)=1$, $X(W_4)=0$ X – дискретная с.в. Со значениями $X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=2$.
- Для полного описания случайной величины недостаточно лишь знания ее возможных значений. Необходимо еще знать вероятности этих значений

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

- Пусть X – дискретная с.в., которая принимает значения x_1, $x_2 \ldots x_n$..

С некоторой вероятностью $P_i = P\{X = x_i\}$, i=1,2,3…n…, определяющей вероятность того, что в результате опыта с.в. X примет значение x_i

Закон распределения может быть задан в виде *таблицы*

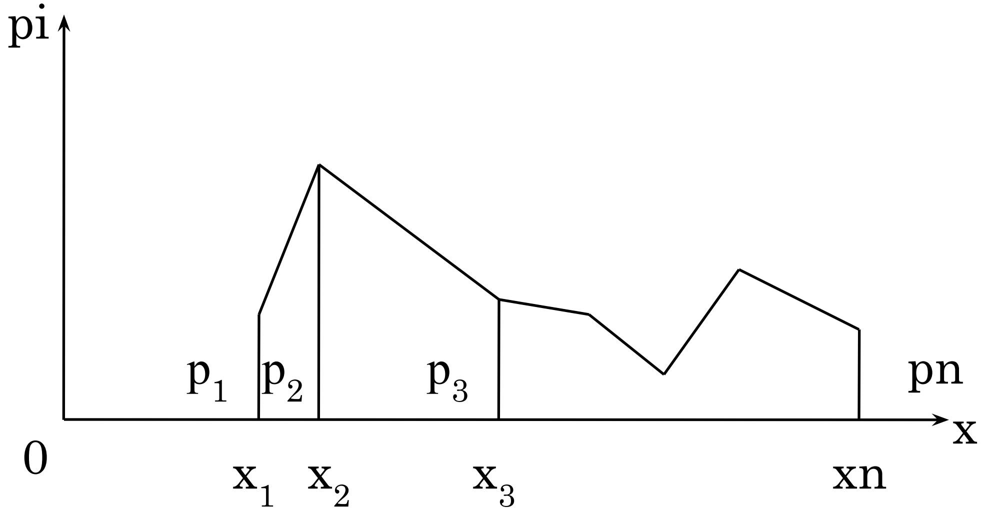
X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

Такую таблицу называют *рядом распределения*

Так как события $\{X=x_1\}$, $\{X=x_2\}$… несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

- Отложить возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений.
- Ломаную, соединяющую точки (X_1, P_1), (X_2,P_2),… называют *многоугольником распределения*.



Случайная величина X дискретна, если конечное или счетное множество X_1, X_2,…,X_n,… таких, что $P\{X=x_i\} = p_i > 0$ $(i=1,2,…)$ и $p_1+p_2+p_3+… =1$

- Пример: В урне 8 шаров из которых 5 белых, остальные – черные. Из нее вынимают наудачу 3 шара. Найти закон распределения числа белых шаров в выборке.
- Решение: Возможные значения с.в. X – число белых шаров в выборке есть $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.
- Вероятности их соответственно будут
- $P_1 = p\{x=0\} = \dfrac{C_5^0 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56}$
- $P_2=p\{x=1\}= \dfrac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3} = \dfrac{15}{56}$
- $P_3=p\{x=2\}= \dfrac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \dfrac{30}{56}$
- $P_4=p\{x=2\}= \dfrac{C_5^3 \cdot C_3^0}{C_8^3} = \dfrac{10}{56}$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = \frac{1}{56} + \frac{15}{56} + \frac{30}{56} + \frac{10}{56} = 1$$

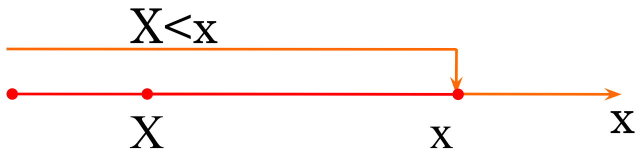
X	0	1	2	3
P	1/56	15/56	30/56	10/56

- *Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины*.
- Универсальным способом задания закона распределения вероятностей, пригодным как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является ее функция распределения.
- Функцией распределения с.в. X называется функция F(x), которая для любого числа $X \in R$ равна вероятности события {X<x}

$$F(x)=P\{X<x\} \quad (1)$$

- Функцию F(x) называют интегральной функцией распределения.

- Геометрически равенство (1) можно истолковать так: F(x) есть вероятность того, что с.в. X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x, т. е. случайная точка X попадет в интервал (∞,x)



Функция распределения обладает *свойствами*:

1)F(x) ограничена, т.е. $0 \leq F(x) \leq 1$

2)F(x) – неубывающая функция на R т.е. если, $x_2 \geq x_1$ то $F(x_2) \geq F(x_1)$

3)F(x) обращается в ноль на минус бесконечности и равна 1 в плюс бесконечности т.е. F(-∞)=0, F(+∞)=1

4) Вероятность с.в. X в промежуток [a,b] равна приращению ее функции распределения на этом промежутке т.е.

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

- 5) F(x) непрерывна слева т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)=F(x_0)$
- С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$ (3)
- Функция распределения дискретной с.в. имеет вид:

$$F(x) = \sum_{X_i < X} p_i \qquad (4)$$

- Равенство (4) непосредственно вытекает из определения (1)
- 6) Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a,b), то для ее функции распределения F(x)=0 при $x \leq a$, F(x)=1 при $x \geq b$

Плотность распределения и ее свойства

Важнейшей характеристикой непрерывной случайной величины является плотность распределения вероятностей.

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна и дифференцируема всюду, кроме отдельных точек.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной с.в. X называется производная ее функции распределения. Обозначается f(x)

По определению: $f(x)=F^{/}(x)$ (5)

Функцию f(x) называют также дифференциальной функцией распределения

Она является одной из форм закона распределения случайной величины.

- Из определения производной следует:
- $F(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$
- Но согласно формуле (2) отношение $\dfrac{P\{x\le X<x+\Delta x\}}{\Delta x}$ представляет собой среднюю вероятность, которая приходится на единицу длины участка $[x,x+\Delta x]$, т.е. среднюю плотность распределения вероятности. Тогда
- $$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\le X<x+\Delta x\}}{\Delta x} \qquad (6)$$
- Т.е.плотность распределения есть предел отношения вероятности попадания случайной величины в промежуток $[x, x+\Delta x]$ к длине Δx этого промежутка, когда $\Delta x\to 0$ Из (6) равенства следует $F(x+\Delta x)-F(x)=P\{x\le X<x+\Delta x\}$
- Т.е. плотность вероятности определяется как функция f(x), удовлетворяющая условию $P\{x\le X<x+\Delta x\}\approx f(x)dx$

  Выражение f(x)dx называется элементом вероятности.
- *Свойства плотности распределения*:
- 1) f(x) неотрицательна, т.е. $f(x)\ge 0$

- 2) Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток [a;b] равна определенному интегралу оси ее плотности в пределах от a до b, т.е. $P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx$
- 3)Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через ее плотность вероятности

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- 4) Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности вероятности непрерывной случайной величины в бесконечных пределах равен 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

- Определение. Случайная величина X называется непрерывной, если существует неотрицательная функция f(x) такая, что при любом x функцию распределения F(x) можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Затем получить, что $f(x) = F'(x)$, следовательно F(x) и f(x) являются эквивалентными обобщающими характеристиками с.в. X
- Для непрерывной с.в. X вероятность события {X=C},где C – число, равна нулю
- Действительно,

$$P\{X = c\} = P\{c \le X \le c\} = \int_c^c f(x)dx = 0$$