

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных.

Источники и классификация погрешностей результата

Получить точное значение при решении задачи на машине практически невозможно. Получаемое решение всегда содержит погрешность и является приближенным. Источники погрешности:

- Погрешность математической модели
- Погрешность в исходных данных
- Погрешность численного метод
- Погрешность округления или отбрасывания.

Погрешность математической модели определяется выбором математической модели. Так для описания падения тела с высоты h_0 и имеющего скорость v_0 используются уравнения:

$$h = h_0 - v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}; \quad v = v_0 + g \cdot t$$

Если учитывать силу сопротивления $F(t)$, действующую на тело массой m , тогда движение тела можно описать с помощью уравнений:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - F(t); \quad \frac{dh}{dt} = -v; \quad \text{при } t = 0, \quad v = v_0, \quad h = h_0$$

Погрешность в исходных данных определяется: погрешностью измерения или погрешностью вычислений, с помощью которых они были получены.

Погрешность численного метода определяется точностью выбранного численного метода и вычислительного средства.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Абсолютная и относительная погрешности.

Пусть α^* — точное (и никогда неизвестное) значение некоторой величины, а α — известное приближение к нему, то **абсолютной погрешностью** приближенного значения α называется величина:

$$\Delta(\alpha) \geq \left| \alpha - \alpha^* \right|$$

Относительной погрешностью приближенного значения α называется величина:

$$\delta(\alpha) \geq \frac{\left| \alpha - \alpha^* \right|}{\left| \alpha \right|}$$

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Например, в числах $\alpha = 0.0\text{3045}$, $\alpha = 0.0\text{304500}}$ значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором 6.

Значащую цифру называют **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре или **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре. Примеры: $\alpha = 0.0\text{304500}}$. Верные цифры подчеркнуты.

$\Delta(\alpha)$	Верные цифры в числе			
	В широком смысле		В узком смысле	
0.001	2	0.0 <u>304</u> 500	1	0.0 <u>3</u> 04500
0.005	1	0.0 <u>3</u> 04500	1	0.0 <u>3</u> 04500
0.0003	2	0.0 <u>304</u> 500	2	0.0 <u>304</u> 500
0.00007	3	0.0 <u>304</u> 500	2	0.0 <u>304</u> 500

Правила округления известны. Обратите внимание, что если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная (правило четной цифры), и увеличивается на единицу, если она нечетная. При этом погрешность не превышает пяти единиц отброшенного разряда.

Пример: 6.71 - 6.7 ; 6.77 - 6.8 ; 6.75 - 6.8; 6.65 - 6.6

Особенности машинной арифметики

В ЭВМ происходит отбрасывание или усечение. В некоторых языках программирования реализованы общепринятые правила округления.

Вещественные числа в ЭВМ представляются в экспоненциальном виде (с плавающей точкой):

$$D = \pm m \cdot b^{\pm n}$$

где m – мантисса, b – основание системы счисления n - порядок

В десятичной системе счисления:

$$D = \pm m \cdot 10^{\pm n}$$

Примеры записи чисел:

5	$0.05 \cdot 10^2, 0.5 \cdot 10^1$
172	$17.2 \cdot 10^1, 0.172 \cdot 10^3$
0.8157	$0.008157 \cdot 10^2 \quad 0.8157 \cdot 10^0$
521.45	$52145 \cdot 10^{-2}, 5.2145 \cdot 10^2$ и $0.52145 \cdot 10^3$

Если представить мантиссу в виде $m = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \dots d_k$, то при $d_1 \neq 0$ получаем нормализованную форму числа, где k – количество цифр в мантиссе, называют разрядной сеткой.

Примеры:

$$0.512 * 10^4 \quad \text{разр.сетка} = 3$$

$$0.5200 * 10^4 \quad \text{разр.сетка} = 4$$

Если $k = 3$ то, следующие числа представим как:

$$5 \quad 0.500 \cdot 10^1$$

$$172 \quad 0.172 \cdot 10^3$$

$$0.008157 \quad 0.815 \cdot 10^{-2}$$

$$521.45 \quad 0.521 \cdot 10^3$$

В последних двух примерах цифры, выходящие за разрядную сетку отброшены. При этом погрешность округления не превышает единицы последнего оставленного разряда.

Выполнение операций над вещественными числами начинается и заканчивается выравниванием порядков. Если порядки различны – погрешность возрастает и может привести к потере точности.

По возможности надо избегать работать с числами, порядки которых отличаются на величину, близкую к длине разрядной сетки, а также вычитания близких по значению величин

Сложить слева направо и наоборот следующие числа:

$0.522 \cdot 100$, $0.157 \cdot 10^{-1}$, $0.186 \cdot 10^{-1}$, $0.239 \cdot 10^{-1}$

$$\begin{array}{r}
 0.522 \cdot 10^0 \\
 +0.015 \cdot 10^0 \\
 \hline
 0.537 \cdot 10^0 \\
 +0.018 \cdot 10^0 \\
 \hline
 0.555 \cdot 10^0 \\
 +0.023 \cdot 10^0 \\
 \hline
 0.578 \cdot 10^0 \\
 \hline
 0.580 \cdot 10^0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0.239 * 10^{-1} \\
 + 0.186 * 10^{-1} \\
 \hline
 0.425 * 10^{-1} \\
 + 0.157 * 10^{-1} \\
 \hline
 0.582 * 10^{-1} \\
 0.058 * 10^0 \\
 + 0.522 * 10^0 \\
 \hline
 0.580 * 10^0
 \end{array}$$

Погрешности вычислений.

Абсолютная погрешность суммы или разности нескольких чисел не превосходит суммы абсолютных погрешностей этих чисел.

$$\Delta(a \pm b) \leq \Delta(a) + \Delta(b)$$

Относительная погрешность суммы:

$$\delta(a + b) \leq \delta_{\max}$$

Относительная погрешность разности:

$$\delta(a - b) \leq \nu \delta_{\max}, \quad \text{где } \nu = \frac{|a + b|}{|a - b|}$$

Относительные погрешности произведения и частного:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b)$$

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции многих переменных:

$$u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$\Delta u \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta(x_i)$$

Пример. Для заданной функции:

$$y = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}$$

определить y , $\Delta(y)$ и $\delta(y)$ при $x_1 = -1.5$ $x_2 = 1.0$ $x_3 = 2.0$. Все цифры в данных верные для x_1 в широком смысле, а для x_2 и x_3 в узком смысле. Вычисляем значение функции.

$$y = \frac{-1.5^2 + 1.0^2}{2.0} = 1.625$$

Вычисляем погрешности:

$$\Delta(x_1) = 0.10 \quad \Delta(x_2) = 0.05 \quad \Delta(x_3) = 0.05$$

$$\Delta(y) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta(x_i)$$

$$\Delta(y) = \left| \frac{2x_1}{x_3} \right| \cdot \Delta(x_1) + \left| \frac{2x_2}{x_3} \right| \cdot \Delta(x_2) + \left| -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} \right| \cdot \Delta(x_3)$$

$$\Delta(y) = \left| \frac{2 \cdot (-1.5)}{2.0} \right| \cdot 0.10 + \left| \frac{2 \cdot 1.0}{2.0} \right| \cdot 0.05 + \left| \frac{-1.5^2 + 1.0^2}{2.0^2} \right| \cdot 0.05$$

$$\Delta(y) = 0.150 + 0.050 + 0.041 = 0.241$$

$$\delta(y) = \frac{0.242}{1.625} = 0.149$$