ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

Вектор

С упорядоченной последовательностью действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ можно связать понятие ***связанного*** вектора в n-мерном пространстве и обозначить как:

$$\vec{a} = [a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix}$$

или понятие точки $A(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$.
Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ называются элементами(***проекциями***) вектора $\vec{a}$ или ***координатами*** точки A, а количество элементов в векторе называется размерностью этого вектора. Положение элемента a_i определяется индексом i, где $i = 1, 2, \cdots, n$. Элементы вектора записываются в виде столбца.

Типы векторов

Нулевой – вектор, все компоненты которого равны нулю и обозначается как:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a=[0;0;0];
a= zeros(3,1);

Единичный – вектор, длина которого равна единице:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}; \quad \square = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1$$

a= [0.6; 0.8];

Транспонированный - вектор, который представлен строкой.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{bmatrix} \quad \vec{a}^T = [a_1\, a_2\, a_3]$$

at= a’;

Матрица

Совокупность чисел расположенных в прямоугольной таблице, состоящей из n строк и m столбцов, называется матрицей и обозначается как:

$$\overset{=}{A} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Положение элемента a_{ij} в матрице определяется двумя индексами (i и j), где i определяет номер строки , а j – номер столбца .

Типы матриц

Матрица, состоящая из одной строки называется вектор строка n=1

A=[1 2 3]; или A=[1:3]
C =[1 3 5 7 9]; или C=[1:2:9];

Матрица, состоящая из одного столбца называется вектор столбец m=1

A=[1;2;3];

Если n равно m матрица называется квадратной

A=[1 2 3;4 3 2;0 1 3];

Верхне треугольная $a_{ij}=0$ при $i>j$

A=[1 2 3;0 2 3;0 0 4];

Нижне треугольная $a_{ij}=0$ при $i<j$

A=[1 0 0;2 3 0;1 2 3];

Диагональная $a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j$

A=[3 0 0;0 2 0; 0 0 5];

Единичная $e_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$

E=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
E=eye(3);

Транспонированная матрица в которой строки заменены на соответствующие столбцы

AT=A';

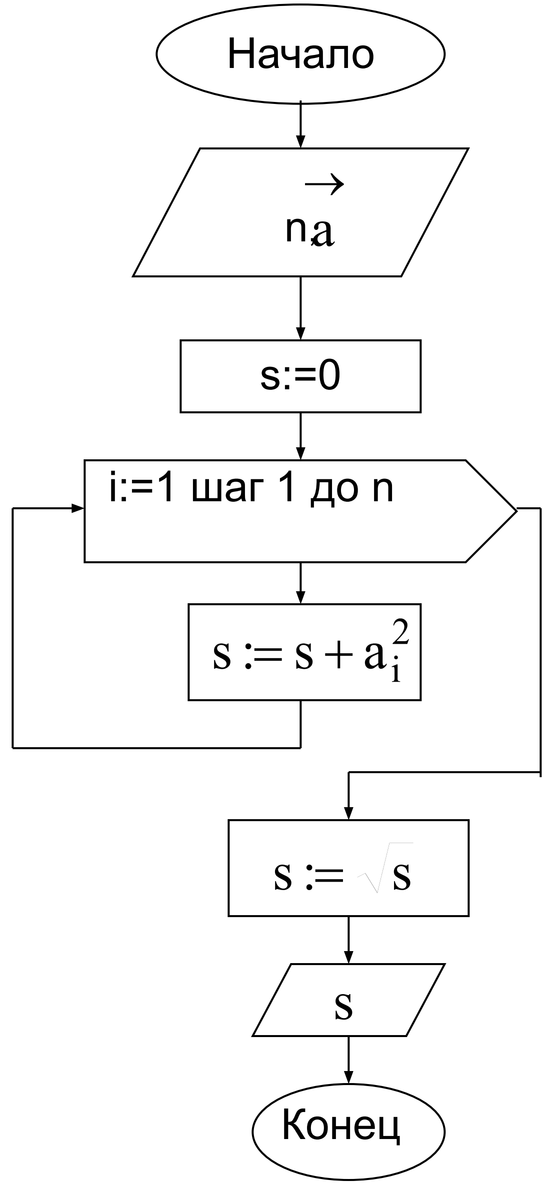
$$a^{t}_{j,i} = a_{i,j}\ , \quad \text{где } i = 1,2,3,\dots,n;\ j = 1,2,3,\dots,m$$

Равенство матриц $\overset{=}{A} = \overset{=}{B}$ т.е. $a_{ij}= b_{ij}$ где i=1,2,3,…,n j=1,2,3,…,m

Характеристики и операции

Норма (длина) вектора

$$\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$



nor=sqrt(sum(a.^2));
nor=norm(a);

Пример.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3.61$$

файл сценария

```
clc
n=input('n=');
a=inpVec(n,’a’);
disp(nVec(n,a));
```

Файл функция

```
function vec=inpVec(n,nameVec);
for i=1:n
   vec(i,1)=input(sprintf('%s(%g)=',nameVec,i));
end
```

Файл функция

```
function nor=nVec(n,a);
s=0;
for i=1:n
   s=s+a(i)^2;
end
nor=sqrt(s);
```

***Норма* матрицы (Эвклидова)**.

$$\left\| \overset{=}{A} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}^2}$$

```
Nor_A=sqrt(sum(A.^2));
Nor_A=norm(A,’fro’);
```

<u>файл сценария</u>

```
clc
n=input('n=');
m=input(‘m=‘);
A= inpMatr(n,m,’A’);
Nor_A=nMatr(n,m,A);
disp(Nor_A);
disp(norm(A,'fro'));
```

<u>Файл функция</u>

```
function nor=nMatr(n,m,A);
s=0;
for i=1:n
   for j=1:m
      s=s+A(i,j)^2;
    end
end
nor=sqrt(s);
```

<u>Файл функция</u>

```
function matr=inpMatr(n,m,nameMatr);
for i=1:n
   for j=1:m
      matr(i,j)=input(sprintf('%s(%g,%g)=',nameMatr,i,j));
   end
end
```

Сложение и вычитание векторов.

Складывать или вычитать можно только вектора с одинаковой размерностью.

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} \qquad c_i = a_i \pm b_i,\ i = 1,2,3,..,n$$

c=a+
b;

<u>файл сценария</u>

```
clc
n=input('n=');
a=inpVec(n,'a');
b=inpVec(n,'b');
c=addVec(n,a,b);
disp('     c'); disp(c)
```

<u>Файл функция</u>

```
function  vec=addVec(n,a,b);
for i=1:n
    vec(i)=a(i)+b(i);
end
```

Сложение и вычитание матриц.

Складывать или вычитать можно только матрицы с одинаковой размерностью.

$$C = A \pm B; \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \ i = 1,2,3,...,n; \quad j = 1,2,3,...,m$$

C=A+B;

<u>файл сценария</u>

```
n=input('n=');
m=input('n=');
A= inpMatr(n,m,’A’);
B= inpMatr(n,m,’B’);
C= addMatr(n,m,A,B);
disp(‘       C’); disp(C);
```

<u>Файл функция</u>

```
function  matr=addMatr(n,m,A,B);
for i=1:n
    for j=1,m
        matr(i,j)=A(i,j)+B(i,j)
    end
end
```

Умножение вектора на константу.

$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} \quad c_i = \lambda \cdot a_i,\ i = 1,2,3,...,n$ c=λ*b;

Умножение матрицы на константу.

$\overline{\overline{C}} = \lambda \cdot \overline{\overline{A}};\ c_{i,j} = \lambda \cdot a_{i,j} \qquad i = 1,2,3,...,n;\ j = 1,2,3,...,m$ C= λ *B;

Скалярное произведение векторов

Это значение суммы произведений соответствующих компонент двух векторов.

$z = (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i,\ i = 1,2,3,...,n$ z=a' * b;

Пример $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$

<u>Файл функция</u>

```
function  sp=scalpr(n,a,b);
sp=0;                           |
for i=1:n                       |
   sp=sp+a(i)*b(i);             |sp=sum(a.*b);
end                             |
```

z=scalpr(n,a,b);

Угол между векторами.
Косинус угла

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a}^T \cdot \vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|}$$

r=a'*b/(norm(a)*norm(b))

Ортогональность векторов

$$\cos(\theta) = 0 \text{ т.е. } \vec{a}^T * \vec{b} = 0$$

Линейная зависимость векторов

Вектора $\vec{a}^{(i)}$ называются линейно зависимыми, если соотношение $\sum_{i=1}^{m} \beta_i * \vec{a}^{(i)} = \vec{0}$

справедливо, хотя бы при одном множителе β_i отличным от нуля.

Пример: $\vec{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}; \; \vec{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \beta_1 \cdot \vec{a}^{(1)} + \beta_2 \cdot \vec{a}^{(2)} = \vec{0} \quad \beta_1 * \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta_2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\beta_1 * 2 + \beta_2 * 1 = 0 \quad \beta_2 = -2 * \beta_1$$

$$\beta_1 * 4 + \beta_2 * 2 = 0 \quad \beta_1 * 4 - \beta_1 * 4 = 0 \quad \beta_1 * 0 = 0 \text{ при любом } \beta_1$$

Умножение матриц.

$$\overset{=}{C} = \overset{=}{A} \cdot \overset{=}{B} \neq \overset{=}{B} \cdot \overset{=}{A}$$

$$\overset{=}{C}_{nm} = \overset{=}{A}_{nk} \cdot \overset{=}{B}_{km}$$

Количество столбцов матрицы $\overset{=}{A}$ должно равняться количеству строк матрицы $\overset{=}{B}$

Элемент c_{ij} вычисляется как скалярное произведение i-й строки матрицы $\overset{=}{A}$ и j-го столбца матрицы $\overset{=}{B}$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}$$

C=A*B;

<u>Файл функция</u>

```
function  RM=multMatr(n,k,m,A,B);
for i=1:n
    for j=1:m
        s=0;
         for ℓ=1:k
             s=s +A(i,ℓ) *B(ℓ,j);
         end
          RM(i,j)=s;
      end
end
```

```
|
|
|RM(i,j)=A(i,:)*B(:,j);
|
|
```

C=multMatr(n,k,m,A,B);

AO=inv(A);

Обращение матрицы методом Гаусса-Жордана

Обратной матрицей называется такая квадратная матрица $\overset{=}{A}{}_{nn}^{-1}$,

при умножении которой на исходную как справа так и слева

получается единичная матрица $\overset{=}{A}{}^{-1} \cdot \overset{=}{A} = \overset{=}{A} \cdot \overset{=}{A}{}^{-1} = \overset{=}{E}$

Обращение матрицы $\overset{=}{A}$ методом Гаусса-Жордана

заключается в построении расширенной матрицы $\left[\begin{array}{c|c} \overset{=}{A} & \overset{=}{E} \end{array}\right]$

и преобразовании расширенной матрицы так, чтобы на месте исходной получилась единичная матрица, тогда на месте единичной получится обратная матрица:

$$\left[\begin{array}{c|c} \overset{=}{E}_{nn} & \overset{=}{A}{}_{nn}^{-1} \end{array}\right]$$

Текстуальный алгоритм

метода Гаусса-Жордана состоит из четырёх этапов.

1. Строим расширенную матрицу дописав к исходной квадратной матрице единичную матрицу того же размера

$$\bar{\bar{C}}_{n,2n} = \left[\bar{\bar{A}}_{nn} \middle| \bar{\bar{E}}_{nn} \right]$$, и задаём номер ведущей строки k=1.

E=eye(n);
C=[A,E];

2. Делим элементы k-й строки начиная с k-ого на c_{kk}

$$c_{kj} = \frac{c_{kj}}{c_{kk}}$$, j = k,k+1,k+2,…,2·n т.е. c_{kk} =1.

3. Преобразуем все i-е строки кроме k-й, i=1,2,3,…,n i≠k так, чтобы элементы c_{ik}=0. Для этого из каждого элемента i-й строки начиная с k-ого вычитаем соответствующий элемент k-й строки, умноженный на элемент c_{ik} , т.е.

$$c_{ij} = c_{ij} - c_{kj} \cdot c_{ik}, \;\; j = k, k+1, k+2, ..., 2 \cdot n$$

4. Проверяем условие k<n, если оно справедливо, то k=k+1 и выполняем алгоритм с пункта 2, иначе выводим полученную обратную матрицу, расположенную на месте единичной.

Пример. Найти обратную матрицу. $\overset{=}{A} = \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix}$

$$\overset{=}{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{array}\right]$$

k=1

Делим все элементы $1^{ой}$ строки на $\mathbf{c}_{1,1}$(4.00)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{array}\right]$$

i=2 – из $2^{ой}$ строки вычитаем $1^{ую}$ умноженную на $\mathbf{c}_{21}$(2.00)

i=3 – из $3^{ей}$ строки вычитаем $1^{ую}$ умноженную на $\mathbf{c}_{31}$(2.00)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 5.00 & 0.50 & -0.50 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 3.50 & -0.50 & 0.00 & 1.00 \end{array}\right]$$

k=2

Делим все элементы $2^{ой}$ строки на $\mathbf{c}_{2,2}$(5.00)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.10 & -0.10 & 0.20 & 0.00 \\ 0.00 & 0.50 & 3.50 & -0.50 & 0.00 & 1.00 \end{array}\right]$$

i=1 – из 1ой строки вычитаем 2^{ую} умноженную на $\mathbf{c}_{12}$(0.25)

i=3 – из 3^{ей} строки вычитаем 2^{ую} умноженную на $\mathbf{c}_{32}$(0.50)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.00 & 0.23 & 0.28 & -0.05 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.10 & -0.10 & 0.20 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.45 & -0.45 & -0.10 & 1.00 \end{array}\right]$$

k=3

Делим все элементы 3^{ей} строки на $\mathbf{c}_{33}$(3.45)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.00 & 0.23 & 0.28 & -0.05 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.10 & -0.10 & 0.20 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & -0.13 & -0.03 & 0.29 \end{array}\right]$$

i=1 – из 1ой строки вычитаем 3^{ью} умноженную на $\mathbf{c}_{13}$(0.23)

i=2 – из 2ой строки вычитаем 3^{ью} умноженную на $\mathbf{c}_{23}$(0.10)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.30 & -0.04 & -0.07 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & -0.09 & 0.20 & -0.03 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & -0.13 & -0.03 & 0.29 \end{array}\right]$$

$$\overset{=}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.30 & -0.04 & -0.07 \\ -0.09 & 0.20 & -0.03 \\ 0.13 & -0.03 & 0.29 \end{bmatrix}$$