СТАТИСТИКА

Введение в теорию вероятности

Лекция 3. Случайная величина. Закон распределения случайной величины. Числовые характеристики случайной величины.

Автор: Равичев Л.В.
РХТУ им. Д.И.Менделеева
Кафедра управления технологическими инновациями
Москва - 2013

Случайная величина

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Закон распределения случайной величины

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными её значениями и их вероятностями. Его можно задать **таблично, графически и аналитически** (в виде формулы).

Ряд распределения представляет собой таблицу вида:

x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
P_1	P_2	...	P_i	...	P_n

Эмпирический ряд:

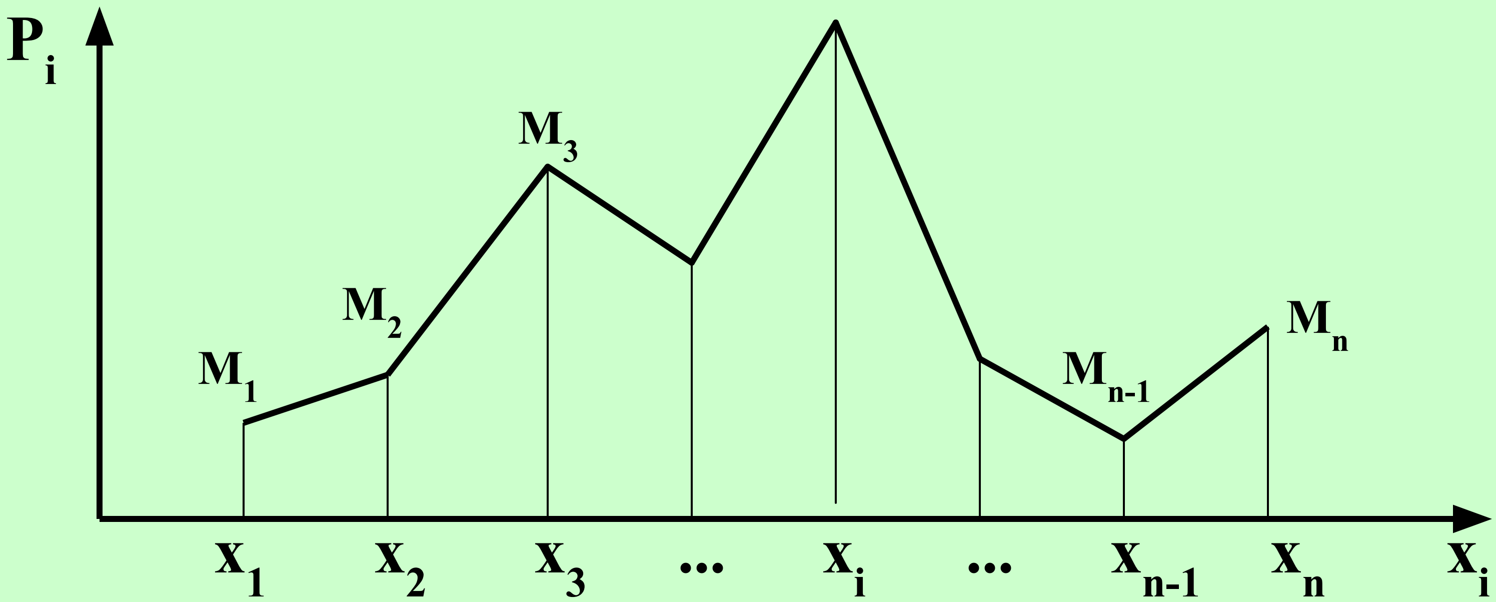
x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
m_1	m_2	...	m_i	...	m_n

Закон распределения случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически в виде ***многоугольника (полигона) распределения***, либо в виде ***гистограммы.***

Многоугольник (полигон) распределения:

1) $P_i = m_i/n \quad i = 1,2,\ldots,n$ **2)** $M_i\,(x_i\,, P_i) \quad i = 1,2,\ldots,n$



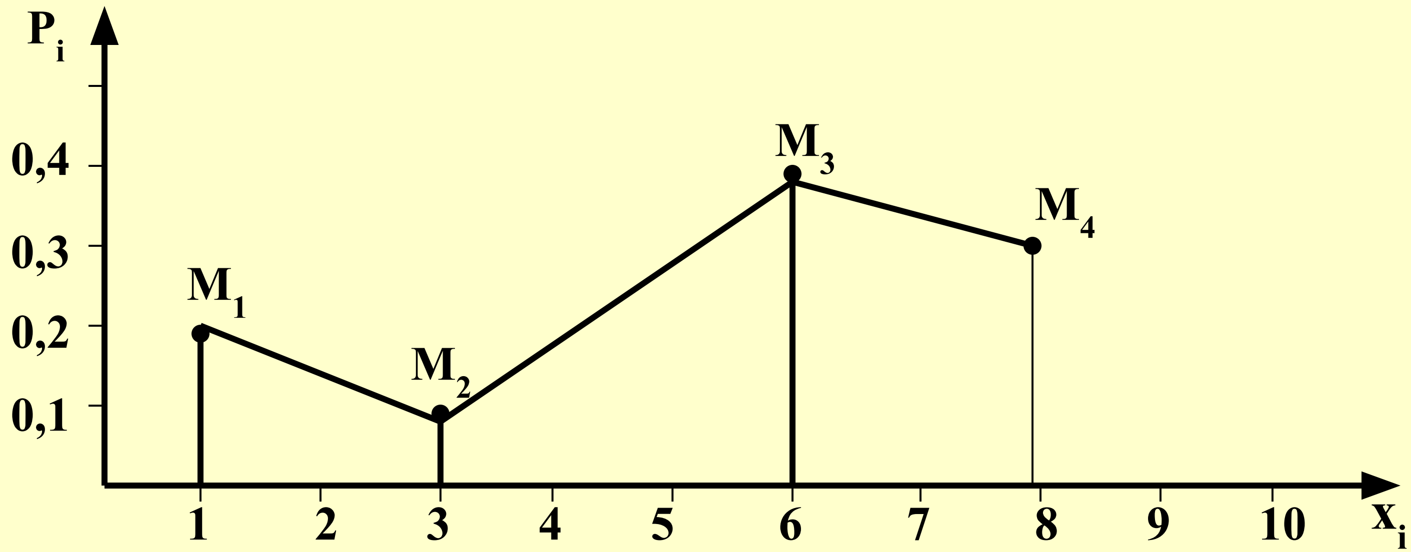
Закон распределения случайной величины

Дискретная случайная величина **X** задана законом распределения:

x_i	1	3	6	8
P_i	0,2	0,1	0,4	0,3

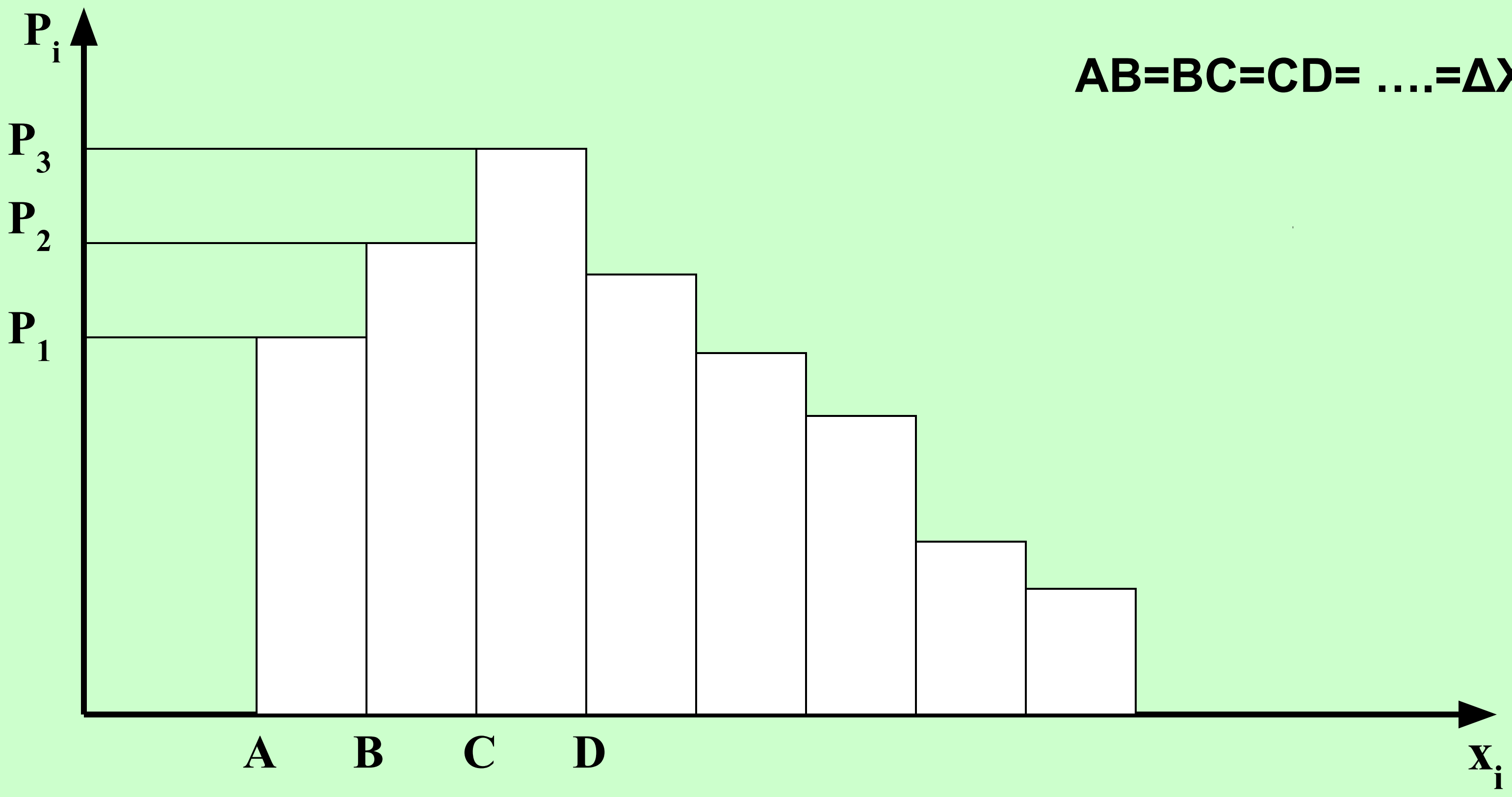
построить полигон распределения.

$M_1\,(1\,;\,0{,}2)$, $M_2\,(3\,;\,0{,}1)$, $M_3\,(6\,;\,0{,}4)$, $M_4\,(8\,;\,0{,}3)$



Закон распределения случайной величины

Гистограмма распределения дискретной случайной величины применяется для графического изображения интервальных рядов распределения.

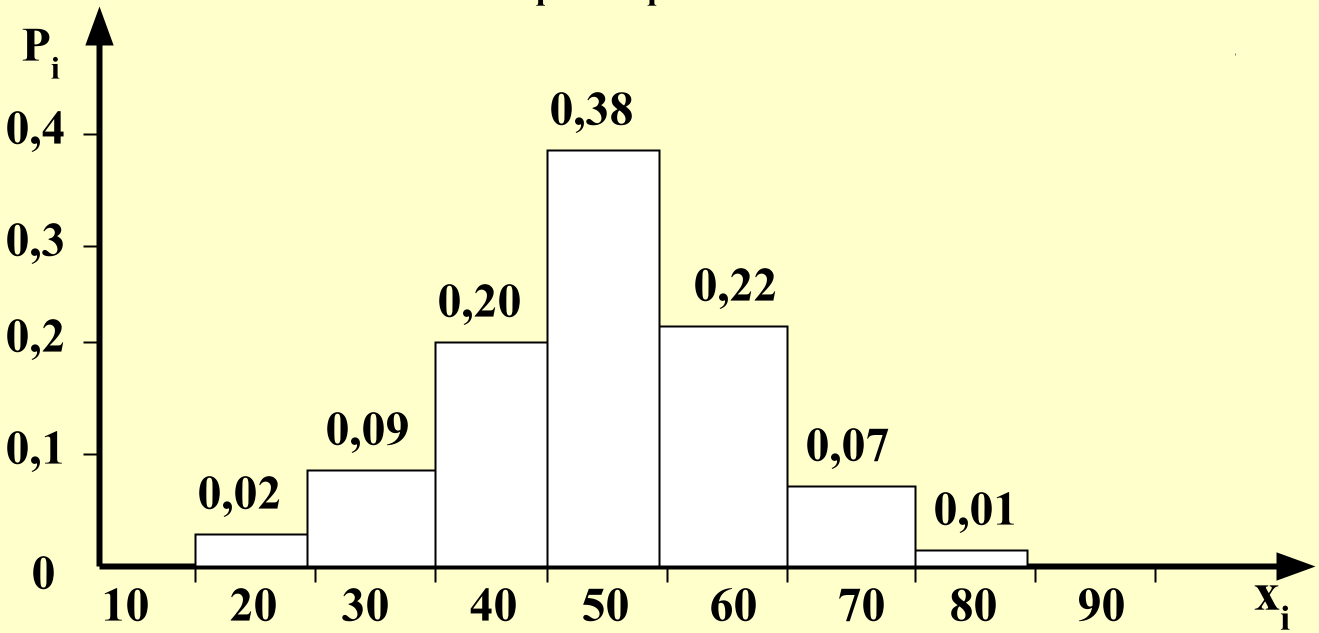


Закон распределения случайной величины

Заказы у оптовой базы в неделю были распределены следующим образом:

Количество заказов(ΔX)	0-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90
Частота заказов (m_i)	**0**	**4**	**16**	**35**	**66**	**38**	**13**	**2**	**0**

Относительная частота заказов $\mathbf{P_i = m_i/n}$, где $\mathbf{n=174}$.



Закон распределения случайной величины

В теории вероятности случайная величина полностью характеризуется своей функцией распределения. При помощи функции (закона) распределения можно оценить вероятность того, что случайная величина попадет в заданный интервал **[a,b]**.

$$\mathbf{P(a \leq X<b) = f(b) - f(a)}$$

Функций распределения случайной величины на сегодняшний день выявлено несколько десятков, но практически обходятся значительно меньшим числом. Среди наиболее употребляемых следует отметить следующие: **биномиальное, распределение Пуассона, нормальное** и **равномерное** распределение случайной величины.

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение - это распределение случайных величин, в котором может быть только два исхода: благоприятный и неблогоприятный. Если известна вероятность успеха **p** в каждом испытании, то вероятность **k** удачных исходов в **n** ре-реализациях (наблюдениях) равна:

$$\mathbf{f(k) = \frac{n!}{k!(n - k)!}\, p^k\, (1 - p)^{n-k}}$$

Геометрическое распределение - частный случай биномиального распределения; при **k=1** оно описывает вероятность первого удач-
ного результата во всех **n** реализациях (испытаниях):

$$\mathbf{f(1) = p\, (1 - p)^{n-1}}$$

Распределение Пуассона

<u>Распределение Пуассона</u> - это распределение числа появления редких случайных событий, которые могут принимать только два
противоположных значения. Это распределение возникает, когда вероятность наступления одного из признаков мала, а число ис-пытаний **n** большое. Если известна вероятность успеха **p** в каждом испытании, то вероятность того, что в **n** независимых ис-
пытаниях событие наступит **k** раз, равна:

$$f(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

a - параметр распределения; **a = n * p**

Распределение Пуассона

С помощью формулы Пуассона можно найти вероятность появления однородных событий, следующих друг за другом во времени. Вероятность того, что величина интервала между соседними событиями (например между включением оборудования и его отказом) не превосходит **t**, равна:

$$\mathbf{f(t) = 1 - e^{-at}}$$

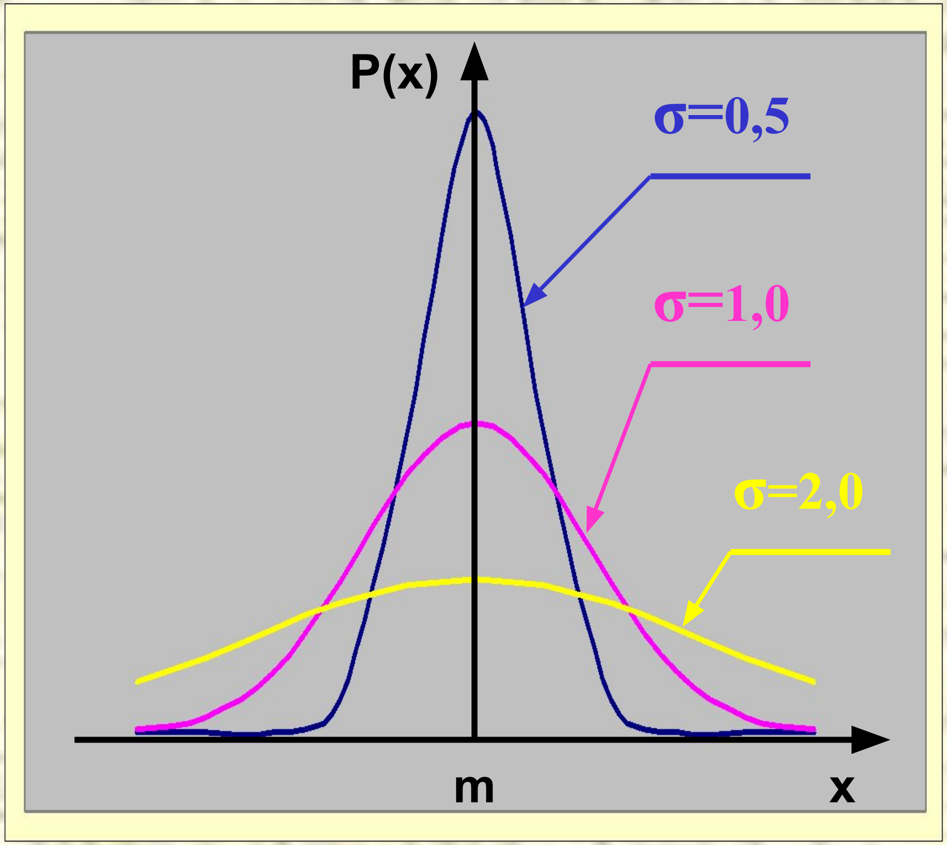
Вероятность безотказной работы:

$$\mathbf{f(t) = e^{-at}}$$

t = 1,2,3,….

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Случайная величина называется **распределённой нормально,** если она имеет плотность вероятности следующего вида:



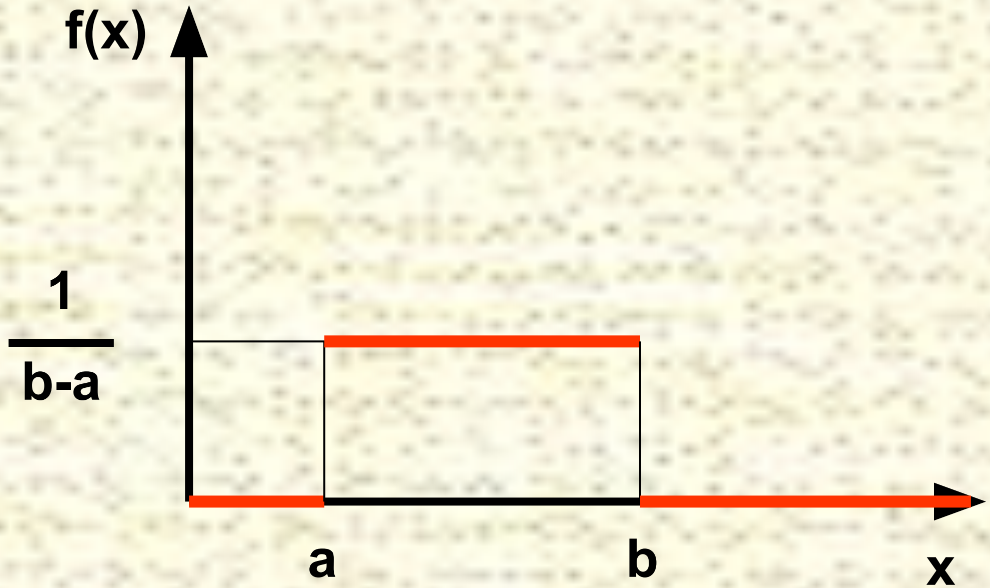
$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{cp})^2}{n-1}}$$

σ^2 - дисперсия

Равномерное распределение

Случайная величина называется **равномерно распределённой** на [a,b], если её плотность вероятности на этом интервале постоянна, а вне [a,b] равна 0.



$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$