ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

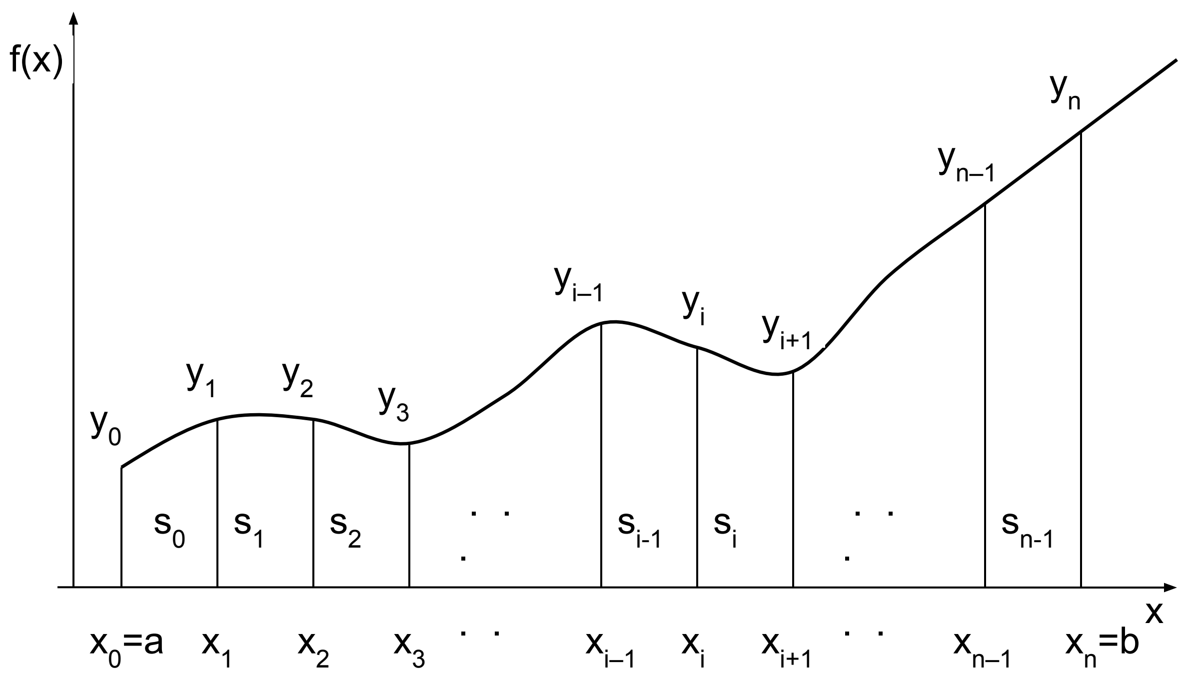
Пусть на отрезке [a; b] определена непрерывная функция f(x).

Требуется определить значение определенного интеграла $$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

которое численно равно площади S фигуры, ограниченной графиком функции f(x) и осью x, на заданном отрезке [a; b]. Для приближенного вычисления площади, разобьем отрезок [a; b] на n равных элементарных отрезков точками:

$x_0=a$, $x_1= a+h$, $x_2=x_1+h, \ldots, x_i=x_{i-1}+h, \ldots, x_n=b$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$ – шаг разбиения.

Значение функции f(x) в точках разбиения x_i обозначим через y_i.



Площадь S можно вычислить как сумму элементарных площадей определенных для соответствующих элементарных отрезков длиной h:

$$S = s_0+s_1+s_2+\dots s_i+\dots\dots+s_{n-1}$$

Произвольную площадь s_i можно вычислить, как определенный интеграл на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ от более простой функции $\varphi_i(x)$, которой заменим реальную функцию f(x):

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx$$

Вид функции $\varphi_i(x)$ будет определять название метода.

Методы прямоугольников

Значение функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ принимается константой

Метод прямоугольников вперед.

Для функции $\varphi_i(x) = y_i$ значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Метод прямоугольников назад.

Для функции $\varphi_i(x) = y_{i+1}$ значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} dx = y_{i+1} \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1} \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

Метод прямоугольников в среднем.

Вычислим $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h$ и значение функции $\varphi_i(x) = y_{i+1/2}$

Тогда значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1/2}dx = y_{i+1/2} \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1/2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1/2} \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}$$

Метод трапеций

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как линейную на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. ее график должен проходить через две смежные точки (x_i,y_i) и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум точкам (x_i,y_i) и (x_{i+1},y_{i+1}):

$$\varphi_i(x) = L_i(x) = y_i \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_1}^{x_i+1} L_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+1} y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})}dx + \int_{x_i}^{x_i+1} y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}dx$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_i}{h}$

Тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$. Значениям x, равным x_i, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0, 1. Значение $(x-x_i) = x_i – x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x-x_{i+1}) = x_i – x_{i+1} + h \cdot t = h(t-1)$. Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$\int_0^1 y_i \frac{h(t-1)}{(-h)} h\,dt + \int_0^1 y_{i+1} \frac{ht}{(h)} h\,dt = h\left(\int_0^1 y_i (1-t)dt + \int_0^1 y_{i+1} t\,dt\right) = h\left(y_i \left(t\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right) + y_{i+1} \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= h \cdot \left(y_i \left(1 - \frac{1}{2}\right) + y_{i+1} \frac{1}{2} \right) = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots. + 2y_{n-1} + y_n) = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона

Определим точку $x_{i+½} = x_i+½·h$ в середине элементарного отрезка $[x_i;x_{i+1}]$ и значение функции в этой точке $y_{i+½}$

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как квадратичную на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. её график должен проходить через три смежные точки (x_i,y_i),$(x_{i+½},y_{i+½})$ и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по трём точкам x_i, $x_{i+½}$ и x_{i+1}:

$$\varphi_i(x) = L_i(x) = y_i \frac{(x-x_{i+1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1/2})(x_i-x_{i+1})} +$$

$$+ y_{i+1/2} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1/2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+1/2})}$$

Тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(y_i \frac{(x-x_{i+1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1/2})(x_i-x_{i+1})} + \right.$$

$$\left. y_{i+1/2} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})} + y_{i+1} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1/2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+1/2})} \right) dx$$

Введем переменную $t = \dfrac{x - x_i}{h}$ тогда $x = x_i + h\cdot t$ и $dx = h\cdot dt$.

Значениям x, равным x_i, $x_{i+½}$, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0,½,1

Значение $(x-x_i) = x_i - x_i + h\cdot t = h\cdot t$. Значение $(x-x_{i+½}) = x_i - x_{i+½} + h\cdot t = h(t-½)$

Значение $(x-x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h\cdot t = h(t-1)$

Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$s_i = \int_0^1 \left(y_i \frac{h(t-\frac{1}{2})h(t-1)}{(-\frac{h}{2})(-h)} + y_{i+1/2} \frac{hth(t-1)}{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})} + y_{i+1} \frac{hth(t-\frac{1}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} \right) hdt =$$

$$= \int_0^1 (y_i \frac{(t-\frac{1}{2})(t-1)}{(\frac{1}{2})}) + y_{i+1/2} \frac{t(t-1)}{(-\frac{1}{4})} + y_{i+1} \frac{t(t-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})}) hdt =$$

$$= h\int_0^1 (y_i(2t^2 - 3t + 1) - 4y_{i+1/2}(t^2 - t) + y_{i+1}(2t^2 - t))dt =$$

$$= h\left(y_i\left(2\frac{t^3}{3}\Big| - 3\frac{t^2}{2}\Big| + t\Big|\right) - 4y_{i+1/2}\left(\frac{t^3}{3}\Big| - \frac{t^2}{2}\Big|\right) + y_{i+1}\left(2\frac{t^3}{3}\Big| - \frac{t^2}{2}\Big|\right)\right) =$$

$$= h\left(y_i\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) - y_{i+1/2}4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + y_{i+1}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\right) = h\left(y_i\frac{1}{6} + y_{i+1/2}\frac{4}{6} + y_{i+1}\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{h}{6}(y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})$$

Тогда значения общей S площади можно вычислить как:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \frac{h}{6} \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})$$

$$S = \frac{h}{6} \cdot (y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n)$$