

## Решение уравнения с одним неизвестным

Дано уравнение в виде  $f(x)=0$ , где  $f(x)$  некоторая функция переменной  $x$ . Число  $x^*$  называется корнем или решением данного уравнения, если при подстановке  $x = x^*$  в уравнение последнее обращается в тождество.  $f(x^*)=0$ . Число  $x^*$  называют также нулем функции  $y=f(x)$ .

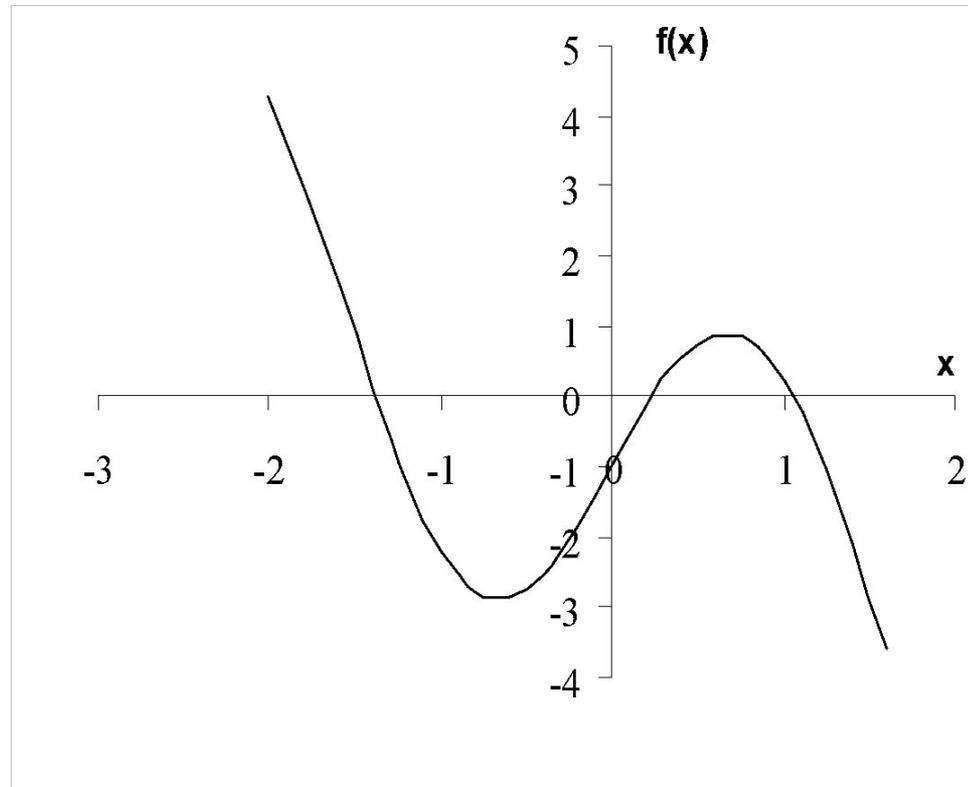
В общем случае уравнение может иметь одно или несколько корней, как действительных, так и комплексных. Нахождение действительных корней с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала корни отделяются, т.е. определяются отрезки, которые содержат по одному корню уравнения; а затем уточняются, т.е. вычисляются с требуемой точностью  $\varepsilon$ . Отделение корней уравнения  $f(x)=0$ , в области определения, непрерывной функции  $f(x)$ , можно осуществлять несколькими способами:

*Табулирование* – составление таблицы из равноотстоящих значений независимой переменной  $x$  и соответствующих значений функции и определение отрезков в которых смежные значения функции имеют различные знаки и следовательно содержат нулевые значения функции.

*Графический* - строим график функции  $f(x)$  и определяем минимальные отрезки, включающие точки пересечения графика функции с осью  $x$ .

пример:  $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x) - 1.5 \cdot x - 1 = 0$

x	f(x)
-2,00	4,270
<u>-1,60</u>	1,575
<u>-1,20</u>	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
<u>0,00</u>	-1,000
<u>0,40</u>	0,552
<u>0,80</u>	0,799
<u>1,20</u>	-0,774
1,60	-3,575



Уточнение корня на отрезке  $[a, b]$ , в котором локализован только один корень, осуществляется итерационными методами, в которых последовательно, шаг за шагом, производится уточнение начального приближения корня. Итерацией называется совокупность вычислительных операций, приводящих к новому приближенному значению корня. Если каждое последующее значение  $x^{(k)}$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) находится все ближе к точному значению, говорят, что метод сходится. В противном случае метод расходится. Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение  $x^{(0)}$  и точность  $\varepsilon$ , с которой найти решение уравнения. Условие окончания имеет вид:  $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \varepsilon$ . Все методы можно разделить на две группы: с условной и безусловной сходимостью.

## Методы с безусловной сходимостью

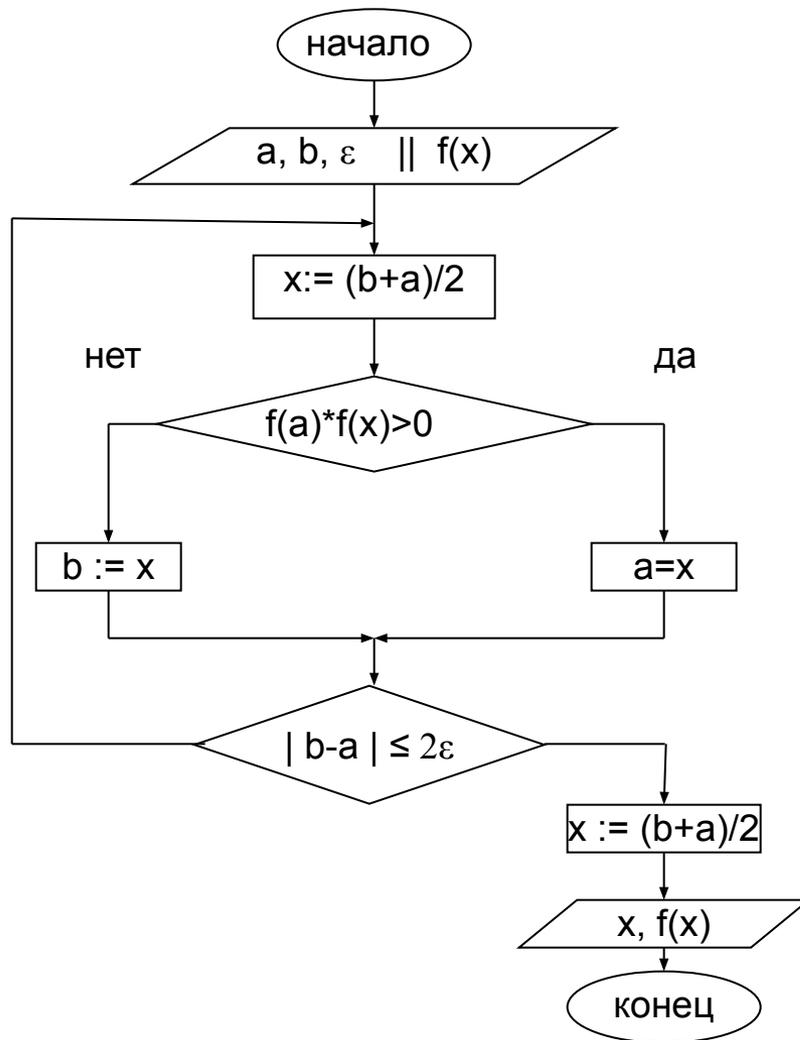
### Метод половинного деления

В этом методе на каждой итерации новое приближение определяется как:  
 $x^{(k)} = (a^{(k-1)} + b^{(k-1)})/2$ , где  $k$  – номер итерации.

#### Алгоритм

1. Задаем функцию  $f(x)$ , отрезок  $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ , точность  $\varepsilon$  и  $k=1$ .
2. Вычисляем приближение  $x^{(k)} = (a^{(k-1)} + b^{(k-1)})/2$
3. Определяем новый отрезок  $[a^{(k)}, b^{(k)}]$ . Проверяем, если  $f(a^{(k-1)}) \cdot f(x^{(k)}) > 0$ , то  $a^{(k)} = x^{(k)}$  и  $b^{(k)} = b^{(k-1)}$ , иначе  $a^{(k)} = a^{(k-1)}$  и  $b^{(k)} = x^{(k)}$ .
4. Проверяем условие окончания, если  $|b^{(k)} - a^{(k)}| \leq 2\varepsilon$ , то за ответ принимаем значение равное  $x = (a^{(k)} + b^{(k)})/2$  и переходим на пункт 5, иначе  $k = k + 1$  и переходим на пункт 2.
5. выводим  $x$  и  $f(x)$ .

# Блок-схема



Решим предыдущий пример при  $a = -1.6$   $b = -1.2$  и  $\varepsilon = 0.01$  т.е.  $2\varepsilon = 0.02$

a	b	x	f(a)	f(x)	b-a
-1,6	-1,2	-1,4	1,575	0,095	0.4
-1,4	-1,2	-1,3	0,095	-0,597	0.2
-1,4	-1,3	-1,35	0,095	-0,257	0.1
-1,4	-1,35	-1,375	0,095	-0,082	0.05
-1,4	-1,375	-1,3875	0,095	0,006	0.025
-1,3875	-1,375	-1,3812		-0,038	0.012

$x = -1,38 \pm 0.01$   $f(x) = -0,038$  (невязка)

## Методы с условной сходимостью

В этих методах исходное уравнение  $f(x)=0$  преобразуется к эквивалентному виду  $x=\phi(x)$ .

Тогда на каждой итерации новое приближение будем определять как:

$$x^{(1)} = \phi(x^{(0)}), x^{(2)} = \phi(x^{(1)}), x^{(3)} = \phi(x^{(2)}), \dots, \text{ т.е. } x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}), k=1,2,3 \dots$$

За  $x^{(0)}$  принимают любое число на заданном отрезке  $[a;b]$ . Вид функции  $\phi(x)$  определим исходя из достаточного условия сходимости, которое записывается как:  $|\phi'(x)| < 1$ , для всех значений  $x$  отрезка  $[a;b]$ , т.е. максимальная производная на заданном отрезке должна быть меньше единицы.

### Метод простых итераций

Общий подход для получения итерационной формулы  $x=\phi(x)$

Помножим обе части уравнения  $f(x)=0$  на множитель, и прибавим к обеим частям по  $x$ , тогда итерационная формула будет иметь вид:

$$x = x + \beta f(x) = \phi(x)$$

Определить множитель  $\beta$  можно из достаточного условия сходимости.

$$|\phi'(x)| < 1$$

$$\phi'(x) = 1 + \beta f'(x)$$

$$|1 + \beta f'(x)| < 1$$

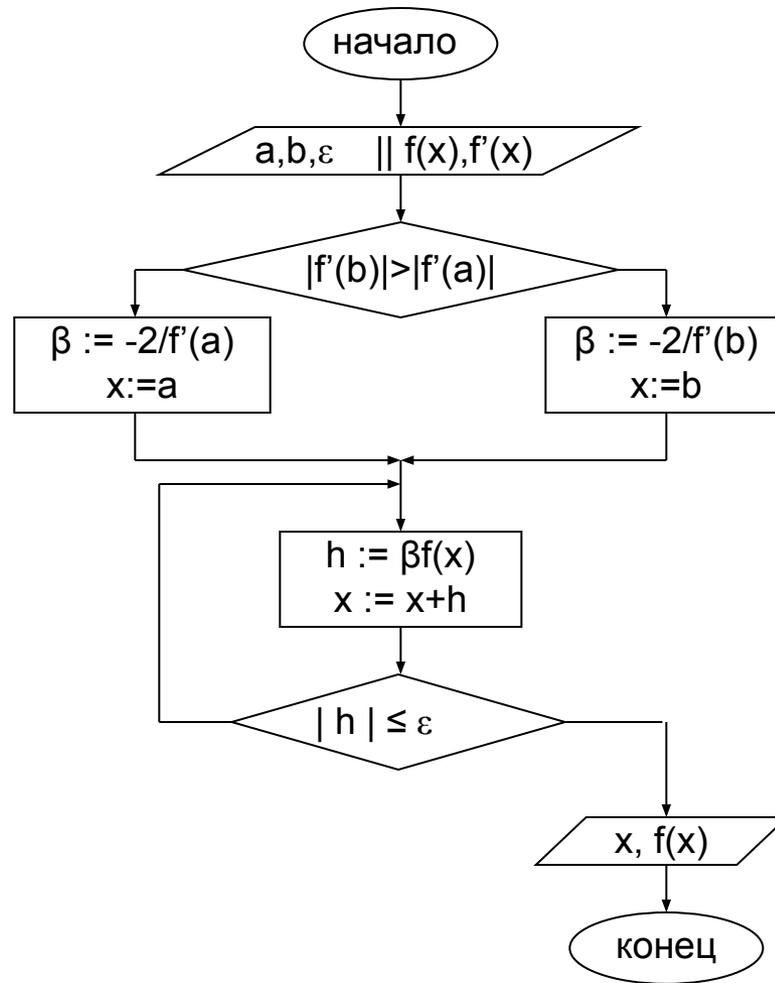
$$-1 < 1 + \beta f'(x) < 1$$

$$-2 < \beta f'(x) < 0.$$

Мы должны выбрать максимальную по модулю производную  $|f'(x)|$  на заданном отрезке.

$$|f'(b)| > |f'(a)| \quad \beta = -2/f'(b), \text{ иначе } \beta = -2/f'(a)$$

# Блок-схема



Пример:  $f(x) = 3\sin(2x) - 1.5x - 1$   $f'(x) = 6\cos(2x) - 1.5$   $\varepsilon = 0.01$   $a = -1,6$   $b = -1,2$   
 $f(a) = -7,489$   $f(b) = -5,924$   $\beta = 0,267 \approx 0.2$   
 $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \beta(3\sin(2x^{(k-1)}) - 1.5x^{(k-1)} - 1)$

k	$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	h	$x^{(k)}$
1	-1,6	1,5751	0,3150	-1,2850
2	-1,2850	-0,6956	-0,1391	-1,4241
3	-1,4241	0,2685	0,05370	-1,3704
4	-1,3704	-0,1149	-0,0230	-1,3934
5	-1,3934	0,0477	0,0095	-1,3838
	-1,3838	-0,0201		

Ответ:  $x = -1,38 \pm 0.01$   $f(x) = -0,020$

## Метод Ньютона или касательных

Пусть известно некоторое приближение  $x^{(k-1)}$  к решению  $x^*$  уравнения  $f(x)=0$ .

Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$$f(x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}) = 0 \quad \text{где } \Delta x^{(k)} = x^* - x^{(k-1)} \text{ и } x^* = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}$$

Разложим функцию в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами.

$$f(x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)}) = f(x^{(k-1)}) + f'(x^{(k-1)})\Delta x^{(k)} = 0$$

откуда

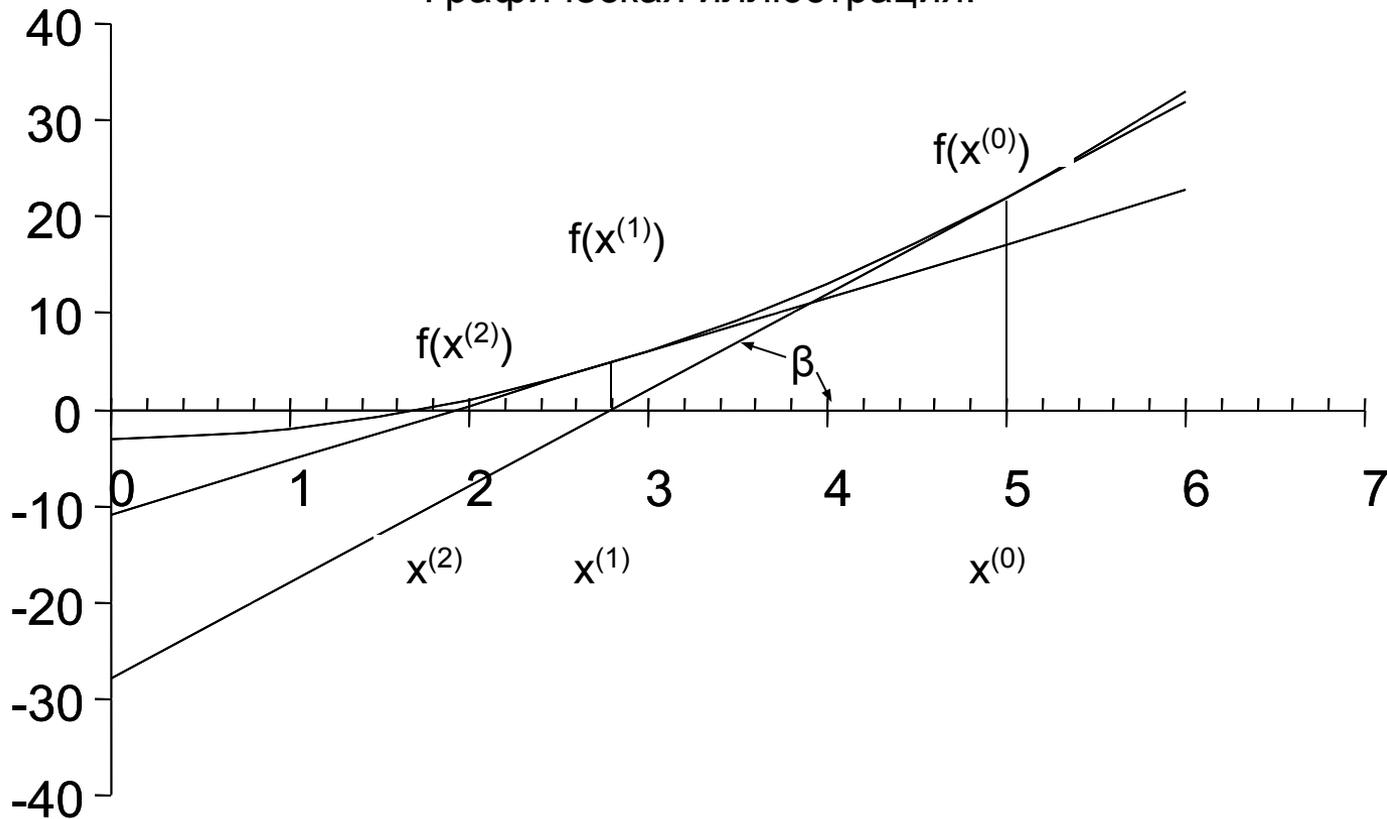
$$\Delta x^{(k)} = -\frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

$$x^* = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

Полученное значение принимаем за новое приближение к решению. Тогда итерационную формулу запишем как:

$$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

### Графическая иллюстрация.



На каждой итерации, за новое приближение к корню  $x^{(k)}$  принимается точка пересечения касательной к графику, построенной в точке  $f(x^{(k-1)})$  с осью абсцисс  $x$ :

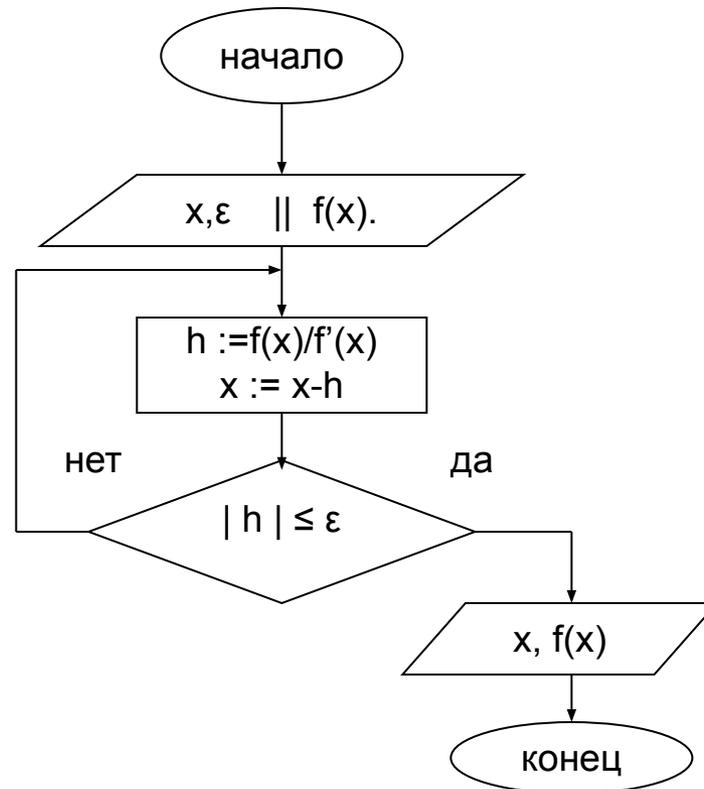
$$\operatorname{tg}(\beta) = f'(x^{(k-1)}) = \frac{f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}} \qquad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})}$$

За начальное приближение к корню  $x^{(0)}$  принимаем одну из границ отрезка  $[a; b]$ , содержащего один корень.

## алгоритм

1. Задаем функцию  $f(x)$  отрезок  $[a;b]$  и точность  $\varepsilon$ . За начальное приближение  $x$  принимаем одну из границ заданного отрезка  $[a,b]$   $x=a$ .
2. Вычисляем значение шага  $h = f(x)/f'(x)$  и новое приближение, как  $x = x-h$ .
3. Проверяем условие окончания если  $|h| \leq \varepsilon$ , то выводим последнее значение  $x$  и  $f(x)$ .  
Иначе перейдем на пункт 2

### Блок-схема



## Пример

$$a = -1.6 \quad b = -1.2 \quad \varepsilon = 0.01 \quad f(x) = 3\sin(2x) - 1.5x - 1 \quad f'(x) = 6\cos(2x) - 1.5 \quad x = a = -1.6$$

$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f'(x^{(k-1)})$	$h$	$x^{(k)}$
-1,6	1,5751	-7,4898	-0,2103	-1,3897
-1,3897	0,0216	-7,1107	-0,0030	-1,3867

Ответ:  $x = 1,387 \pm 0.01$   $f(x) = 0,00002$