

Система нелинейных уравнений (СНУ).

В общем случае систему нелинейных уравнений можно записать как:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$$

Решением СНУ является такой вектор \vec{x}^*

при подстановке которого в систему последняя обращается в тождество.

Метод простых итераций.

Преобразуем систему нелинейных уравнений к эквивалентному виду: $\vec{x} = \varphi(\vec{x})$

Выберем некоторое начальное приближение $\vec{x}^{(0)}$. Последующие приближения найдем

по формулам $\vec{x}^{(1)} = \varphi(\vec{x}^{(0)}); \vec{x}^{(2)} = \varphi(\vec{x}^{(1)}); \vec{x}^{(3)} = \varphi(\vec{x}^{(2)}); \dots$

Произвольное приближение запишем как: $\vec{x}^{(k)} = \varphi(\vec{x}^{(k-1)})$

На каждой итерации вычисляем вектор

$$\vec{\Delta x}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}$$

и проверяем условие окончания итерационного процесса $\|\vec{\Delta x}^{(k)}\| \leq \varepsilon$

где ε заданная точность

Решить СЛУ с точностью $\varepsilon=0.1$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Преобразуем каждое уравнение

$$x_1 = \varphi_1(\vec{x}) = \frac{x_2^2 + 1}{2}$$

$$x_2 = \varphi_2(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}^{(0)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.5^2 + 1}{2} \\ 3 \cdot 0.5^2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ -1.25 \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.13 \\ -1.75 \end{bmatrix}; \quad \|\vec{\Delta x}^{(1)}\| = 1.7544$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \vec{x}^{(1)} \\ \varphi_1(\vec{x}^{(1)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1.25^2 + 1}{2} \\ 3 \cdot 0.63^2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.28 \\ -0.83 \end{bmatrix}; \quad \Delta \vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 0.42 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(2)}\| = 0.7802$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} \vec{x}^{(2)} \\ \varphi_1(\vec{x}^{(2)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(2)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-0.83^2 + 1)}{2} \\ 3 \cdot 1.28^2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.84 \\ 2.92 \end{bmatrix}; \quad \Delta \vec{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.44 \\ 3.75 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(3)}\| = 3.7784$$

Итерационный процесс расходится.

Попробуем, по другому осуществить преобразование.

$$x_1 = \varphi_1(\vec{x}) = \sqrt{\frac{x_2 + 2}{3}}$$

$$x_2 = \varphi_2(\vec{x}) = \sqrt{2 \cdot x_1 - 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \vec{x}^{(0)} \\ \varphi_1(\vec{x}^{(0)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{0.5 + 2}{3}} \\ \sqrt{2 \cdot 0.5 - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.913 \\ 0.000 \end{bmatrix}; \quad \Delta \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.413 \\ -0.500 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(1)}\| = 0.648$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.816 \\ 0.909 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta x^{(2)}\| = 0.9138$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.985 \\ 0.796 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta x^{(3)}\| = 0.202$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.965 \\ 0.985 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta x^{(4)}\| = 0.189$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.997 \\ 0.965 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta x^{(5)}\| = 0.038$$

Процесс сходится к решению.

Если не удаётся преобразовать исходную СЛУ к итерационному виду, который будет сходиться, то можно воспользоваться общим приемом.

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} \rightarrow \vec{x} \quad = \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} \rightarrow \vec{x} \quad = \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x} \rightarrow \vec{x}$$

$$f(\vec{x}) = 0; \quad \lambda \cdot f(\vec{x}) = 0; \quad \vec{x} = \vec{x} + \lambda \cdot f(\vec{x})$$

Итерационную формулу запишем

$$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \lambda \cdot f(\vec{x}^{(k-1)})$$

где матрицу λ

можно представить диагональной, а подбором значений элементов λ можно добиться сходимости итерационного процесса.

Метод Ньютона-Рафсона

Пусть известно некоторое приближение $\vec{x}^{(k-1)}$ к решению \vec{x}^*

Запишем исходную систему в виде $f(\vec{x}^{(k-1)} + \Delta \vec{x}^{(k)}) = 0$, где $\Delta \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^* - \vec{x}^{(k-1)}$

Разложим функцию в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами.

$$f(\vec{x}^{(k-1)} + \Delta \vec{x}^{(k)}) = f(\vec{x}^{(k-1)}) + \frac{\partial f(\vec{x}^{(k-1)})}{\partial \vec{x}^{(k-1)}} \Delta \vec{x}^{(k)} = 0$$

$$\frac{\partial f(\vec{x}^{(k-1)})}{\partial \vec{x}^{(k-1)}} \Delta \vec{x}^{(k)} = -f(\vec{x}^{(k-1)})$$

Это система линейных уравнений относительно $\Delta \vec{x}^{(k)}$

Матрица Якоби

$$\vec{J} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Тогда $\Delta \vec{x}^{(k)} = \left[\vec{J}^{(k-1)} \right]^{-1} \cdot (-\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)}))$, а новое приближение к решению СЧУ будет

иметь вид: $\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \Delta \vec{x}^{(k)}$ или $\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \left[\vec{J}^{(k-1)} \right]^{-1} \cdot (-\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)}))$

Условие окончания итерационного процесса является выполнения неравенства

$$\left\| \Delta \vec{x}^{(k)} \right\| \leq \varepsilon, \text{ где } \Delta \vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}$$

Решить приведенный выше пример $\varepsilon=0.1$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad [J] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \cdot x_2 \\ 6 \cdot x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(0)} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \cdot x_2^0 \\ 6 \cdot x_1^0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^{(0)}) \\ f_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.75 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.25 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(1)}\| = 3.132$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.323 \\ 1.878 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(2)}\| = 1.53$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.070 \\ 1.243 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(3)}\| = 0.684$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.007 \\ 1.029 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(4)}\| = 0.223$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.001 \end{bmatrix}; \quad \|\Delta \vec{x}^{(5)}\| = 0.029$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1.000} \\ \mathbf{1.001} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-0.001} \\ \mathbf{0.000} \end{bmatrix}$$