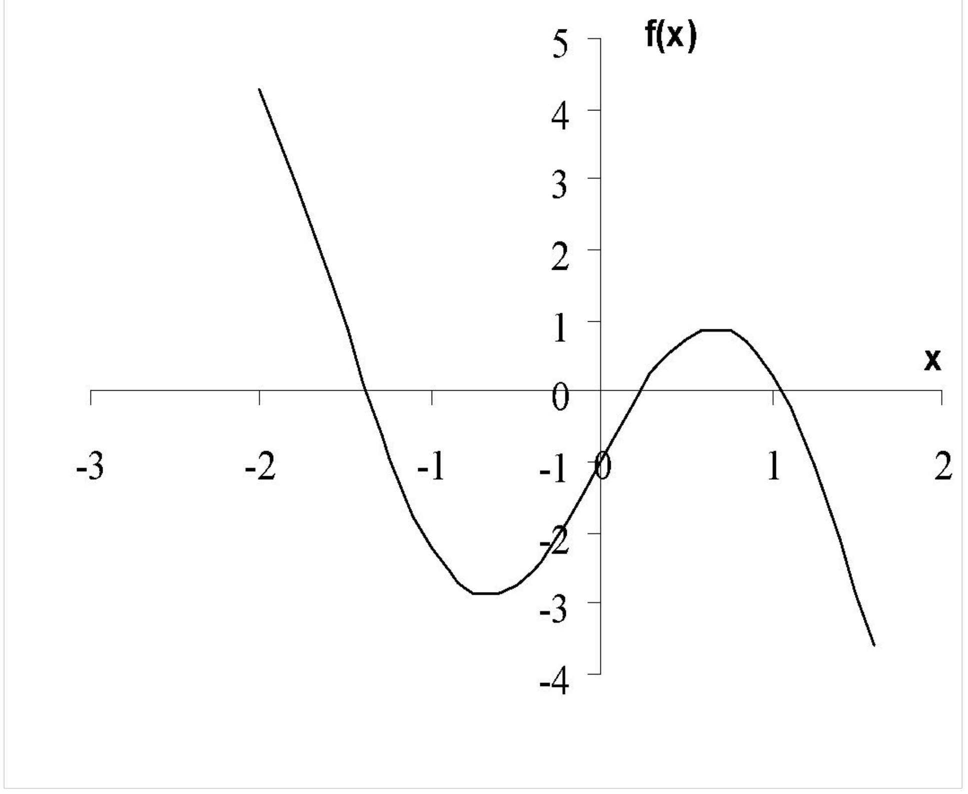
Методы одномерной оптимизации

Дана некоторая функция f(x) от одной переменной x, надо определить такое значение x*, при котором функция f(x) принимает экстремальное значение. Под ним обычно понимают минимальное или максимальное значения. В общем случае функция может иметь одну или несколько экстремальных точек. Нахождение этих точек с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала экстремальные точки отделяют, т.е. определяются отрезки, которые содержат по одной экстремальной точке, а затем уточняют до требуемой точности ε. Отделение можно осуществить, как графически, так и табулированием. Все методы уточнения точек экстремумов будем рассматривать относительно уточнения минимума на заданном отрезке.

пример: f(x) = 3*sin(2*x)-1.5*x-1=0

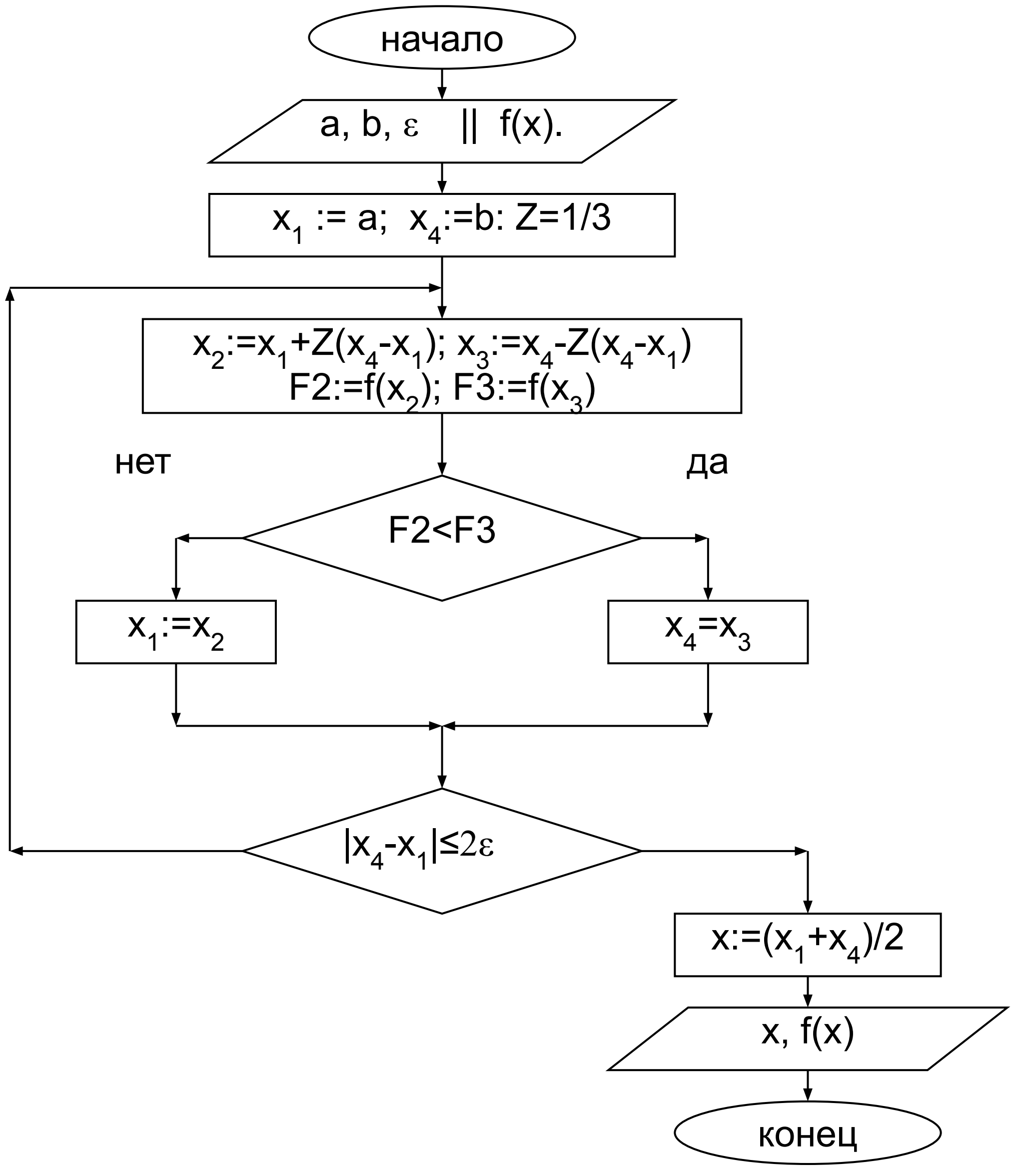
x	f(x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575



Метод деления на три равных отрезка.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b. Вычислим Z=1/3.
2. Делим отрезок на три равные части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если F2 < F3, то границы нового отрезка определим как x1=x1, а $x_4=x_3$, иначе $x_1=x_2$, а $x_4=x_4$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \le 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 2.

Введем понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычисления функции на одной итерации тогда Q=0,33/2≈0,17


начало
a, b, ε || f(x).
x1 := a; x4:=b: Z=1/3
x2:=x1+Z(x4-x1); x3:=x4-Z(x4-x1)
F2:=f(x2); F3:=f(x3)
нет
да
F2<F3
x1:=x2
x4=x3
|x4-x1|≤2ε
x:=(x1+x4)/2
x, f(x)
конец

Метод на три равных отрезка

x_1	x_2	x_3	x_4	F2	F3	$\|x_4-x_1\|$
-1.200	-0.933	-0.667	-0.400	-2.470	-2.916	0.800
-0.933	-0.756	-0.578	-0.400	-2.861	-2.878	0.533
-0.756	-0.637	-0.519	-0.400	-2.913	-2.805	0.356
-0.756	-0.677	-0.598	-0.519	-2.914	-2.894	0.237
-0.756			-0.598			0.158

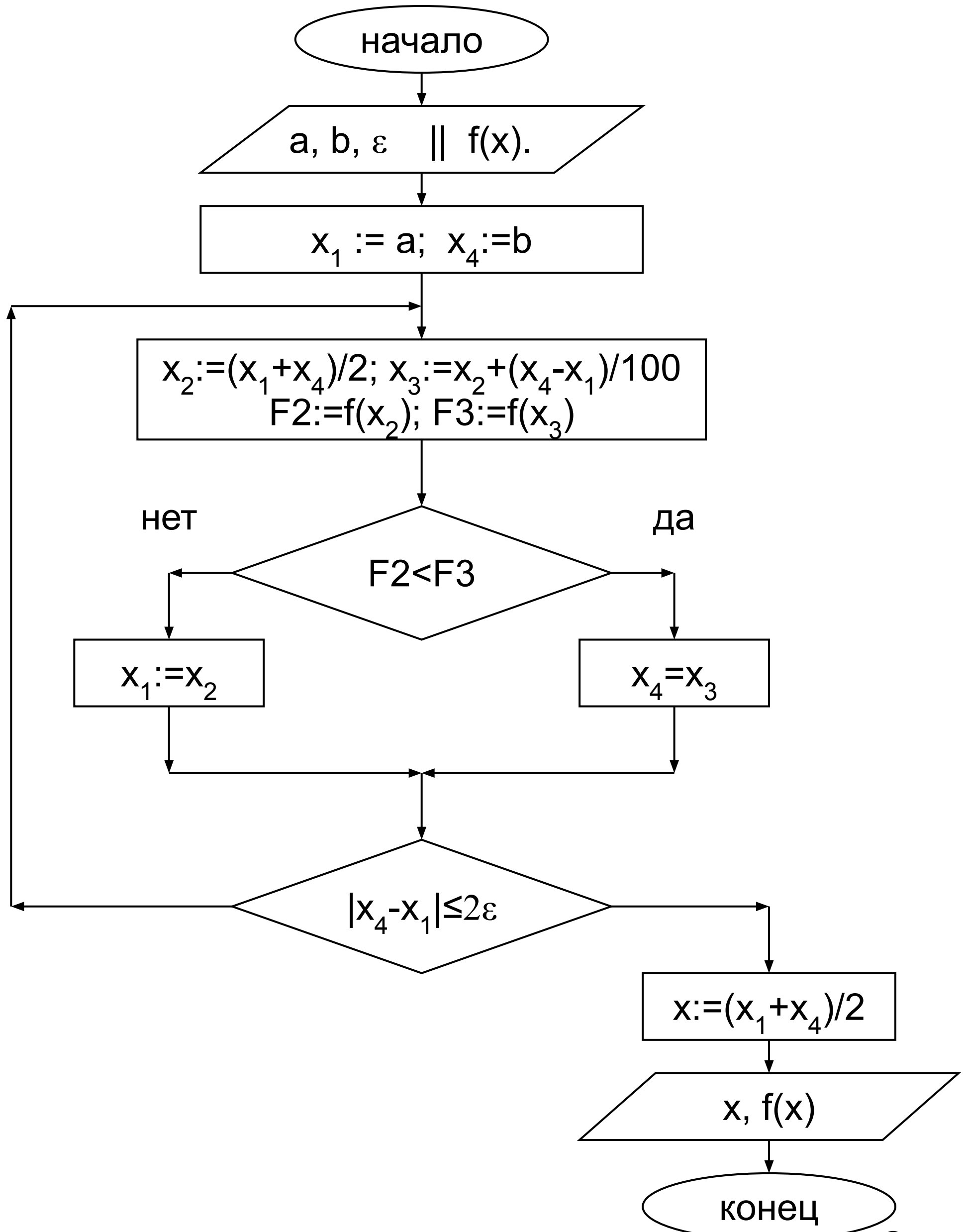
x= -0.677 **f(x)= -2.914**

Попробуем увеличить долю сокращения отрезка

Метод деления отрезка пополам.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек $x_1=a$ и $x_4=b$.
2. Делим отрезок пополам и определяем точку середины $x_2=(x_4+x_1)/2$ и точку x_3, отстоящую на незначительное расстояние от середины $x_3=x_2+(x_4-x_1)/100$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если $F2 < F3$, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, а $x_4=x_3$, иначе $x_1=x_2$, а $x_4=x_4$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \le 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 2.

Эффективность метода $Q \approx 0,5/2=0,25$



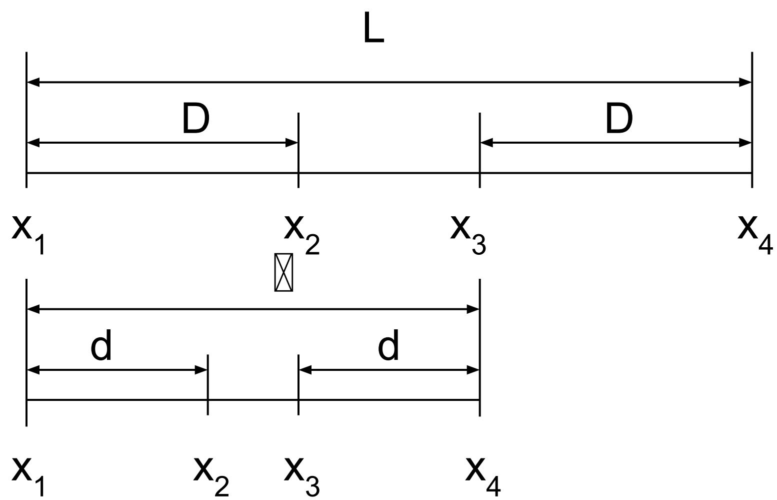
начало
a, b, ε || f(x).
x1 := a; x4:=b
x2:=(x1+x4)/2; x3:=x2+(x4-x1)/100
F2:=f(x2); F3:=f(x3)
нет
да
F2<F3
x1:=x2
x4=x3
|x4-x1|≤2ε
x:=(x1+x4)/2
x, f(x)
конец

Метод половинного деления

x_1	x_2	x_3	x_4	F2	F3	$\lvert x_4-x_1\rvert$
-1.200	-0.800	-0.792	-0.400	-2.799	-2.812	0.800
-0.800	-0.600	-0.596	-0.400	-2.896	-2.893	0.400
-0.800	-0.698	-0.696	-0.596	-2.907	-2.908	0.204
-0.698			-0.596			0.102

x= -0.647 **f(x)= -2.915**

Попробуем разбивать отрезок на такие части, чтобы одну из двух точек и соответствующее значение функции мы могли использовать на следующей итерации.



$$\frac{D}{L} = \frac{d}{\ell}; \; d = L - 2D; \; \ell = L - D; \; \frac{D}{L} = \frac{(L-2D)}{(L-D)}; \; DL - D^2 = L^2 - 2DL$$

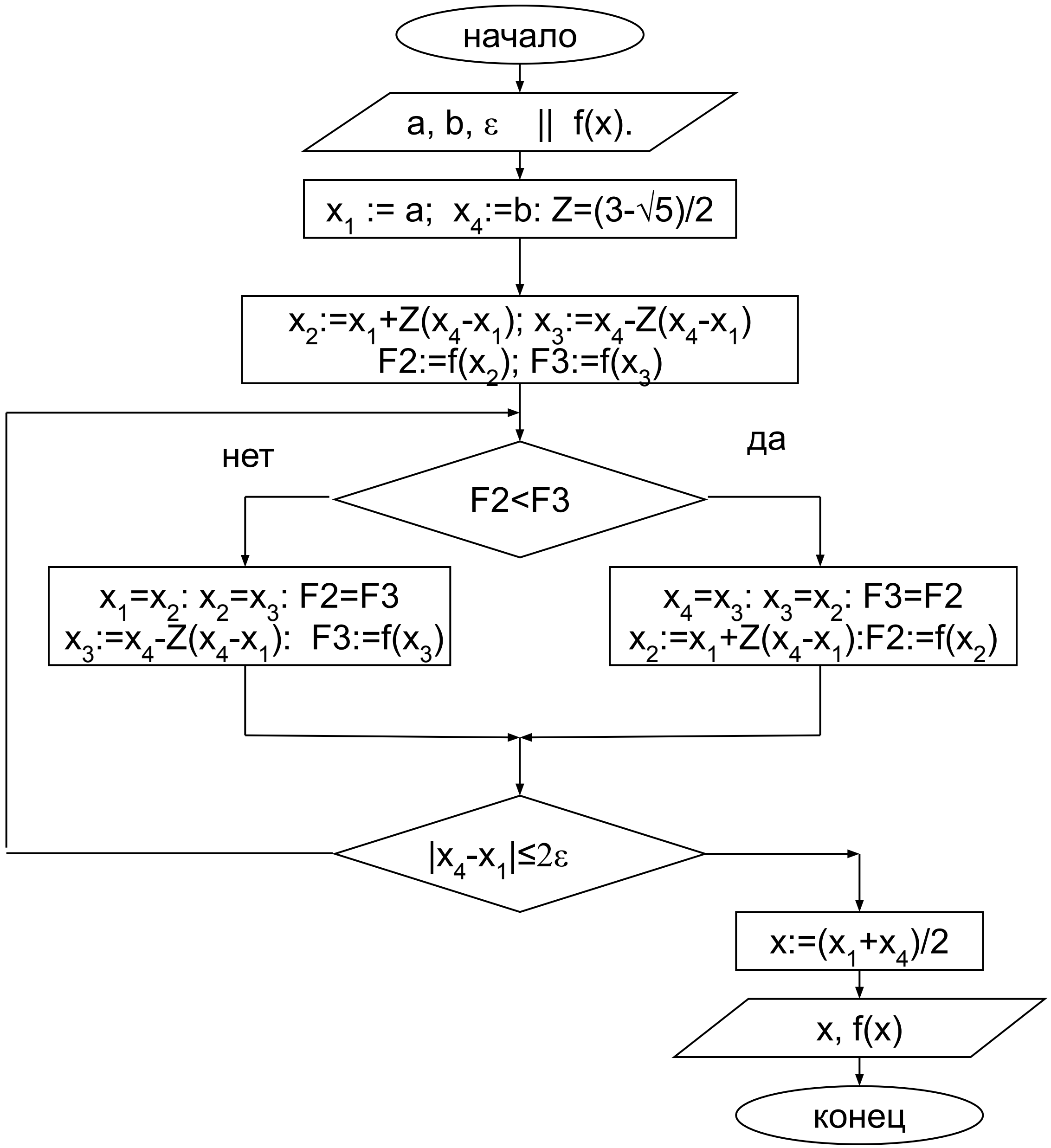
делим на L^2 $\quad \frac{D}{L} - \left(\frac{D}{L}\right)^2 - 1 + 2 \cdot \frac{D}{L} = 0$ Заменяем $\quad Z = \frac{D}{L} \quad Z^2 - 3Z + 1 = 0$

Решая получим $\quad Z = \frac{(3-\sqrt{5})}{2} \approx 0.3819$

Метод Золотого сечения.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b и вычислим Z=(3-√5)/2.
2. Делим отрезок на три части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если F2 < F3, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, $x_4=x_3$, $x_3=x_2$, $F3=F2$ $x_2=x_1+z(x_4-x_1)$ $F2=f(x_2)$ иначе $x_1=x_2$, $x_4=x_4$, $x_2=x_3$ $F2=F3$ $x_3=x_4-z(x_4-x_1)$ $F3= f(x_3)$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \le 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 3.

Введем понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычисления функции на одной итерации тогда Q=0,3819/1≈0,3819


начало
a, b, ε || f(x).
x1 := a; x4:=b: Z=(3-√5)/2
x2:=x1+Z(x4-x1); x3:=x4-Z(x4-x1)
F2:=f(x2); F3:=f(x3)
нет
да
F2<F3
x1=x2: x2=x3: F2=F3
x3:=x4-Z(x4-x1): F3:=f(x3)
x4=x3: x3=x2: F3=F2
x2:=x1+Z(x4-x1):F2:=f(x2)
|x4-x1|≤2ε
x:=(x1+x4)/2
x, f(x)
конец

Метод золотого сечения Z=0.381966

x_1	x_2	x_3	x_4	F2	F3	$\lvert x_4-x_1\rvert$
-1.200	-0.894	-0.706	-0.400	-2.587	-2.903	0.800
-0.894	-0.706	-0.589	-0.400	-2.903	-2.888	0.494
-0.894	-0.778	-0.706	-0.589	-2.833	-2.903	0.306
-0.778			-0.589			0.189

x= -0.683 **f(x)= -2.913**