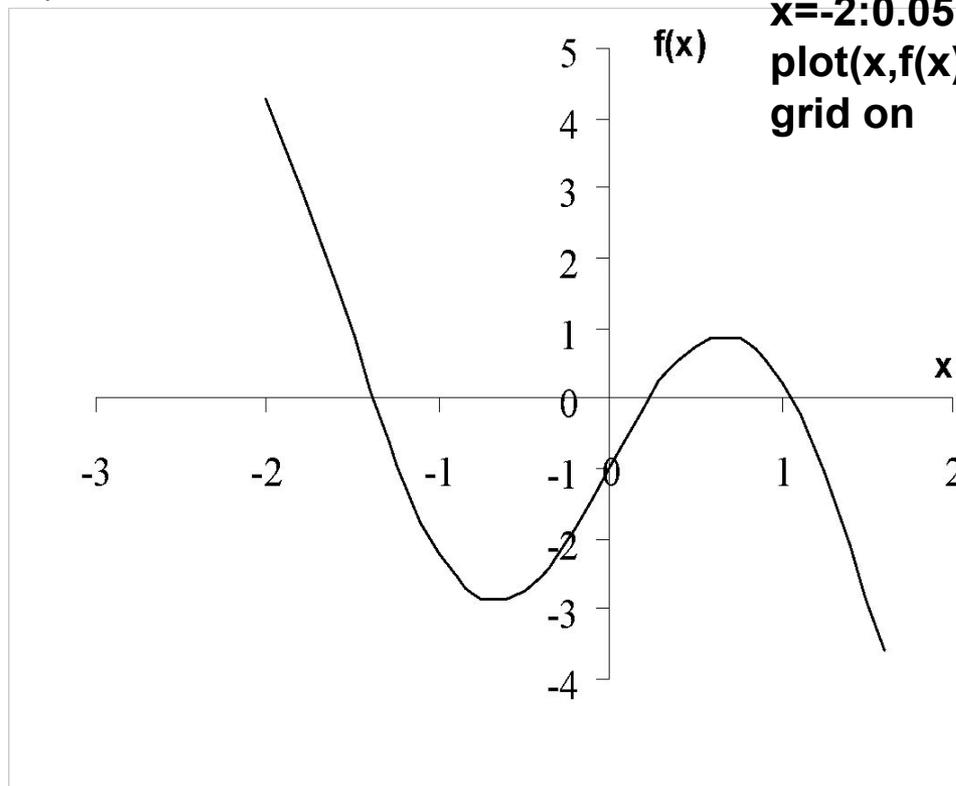


Методы одномерной оптимизации

Дана некоторая функция $f(x)$ от одной переменной x , надо определить такое значение x^* , при котором функция $f(x)$ принимает экстремальное значение. Под ним обычно понимают минимальное или максимальное значения. В общем случае функция может иметь одну или несколько экстремальных точек. Нахождение этих точек с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала экстремальные точки отделяют, т.е. определяются отрезки, которые содержат по одной экстремальной точке, а затем уточняют до требуемой точности ε . Отделение можно осуществить, как графически, так и табулированием. Все методы уточнения точек экстремумов будем рассматривать относительно уточнения минимума на заданном отрезке.

пример: $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x) - 1.5 \cdot x - 1$

x	f(x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575

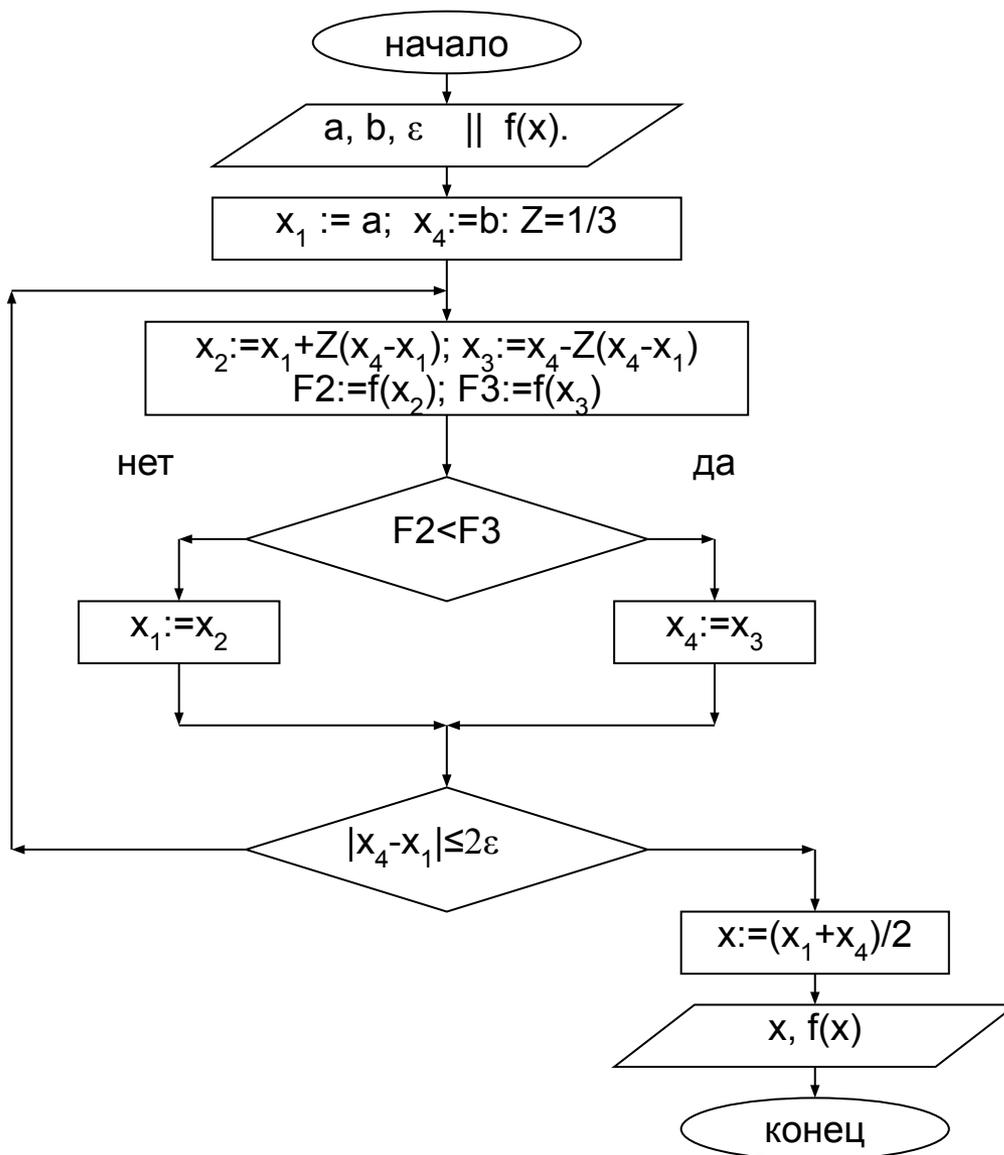


```
f=inline('3*sin(2*x)-1.5*x-1');  
x=-2:0.05:2;  
plot(x,f(x))  
grid on
```

Метод деления на три равных отрезка.

1. Дан отрезок $[a;b]$ на котором определена функция $f(x)$ и точность ε . Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек $x_1=a$ и $x_4=b$. Вычислим $Z=1/3$.
2. Делим отрезок на три равные части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций $F2$ и $F3$. Если $F2 < F3$, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, а $x_4=x_3$, иначе $x_1=x_2$, а $x_4=x_4$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $|x_4-x_1| \leq 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке $f(x)$. Иначе перейдем на пункт 2.

Введем понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычисления функции на одной итерации тогда $Q=0,33/2 \approx 0,17$



$$f(x)=3*\sin(2*x)-1.5*x-1$$

Метод на три равных отрезка

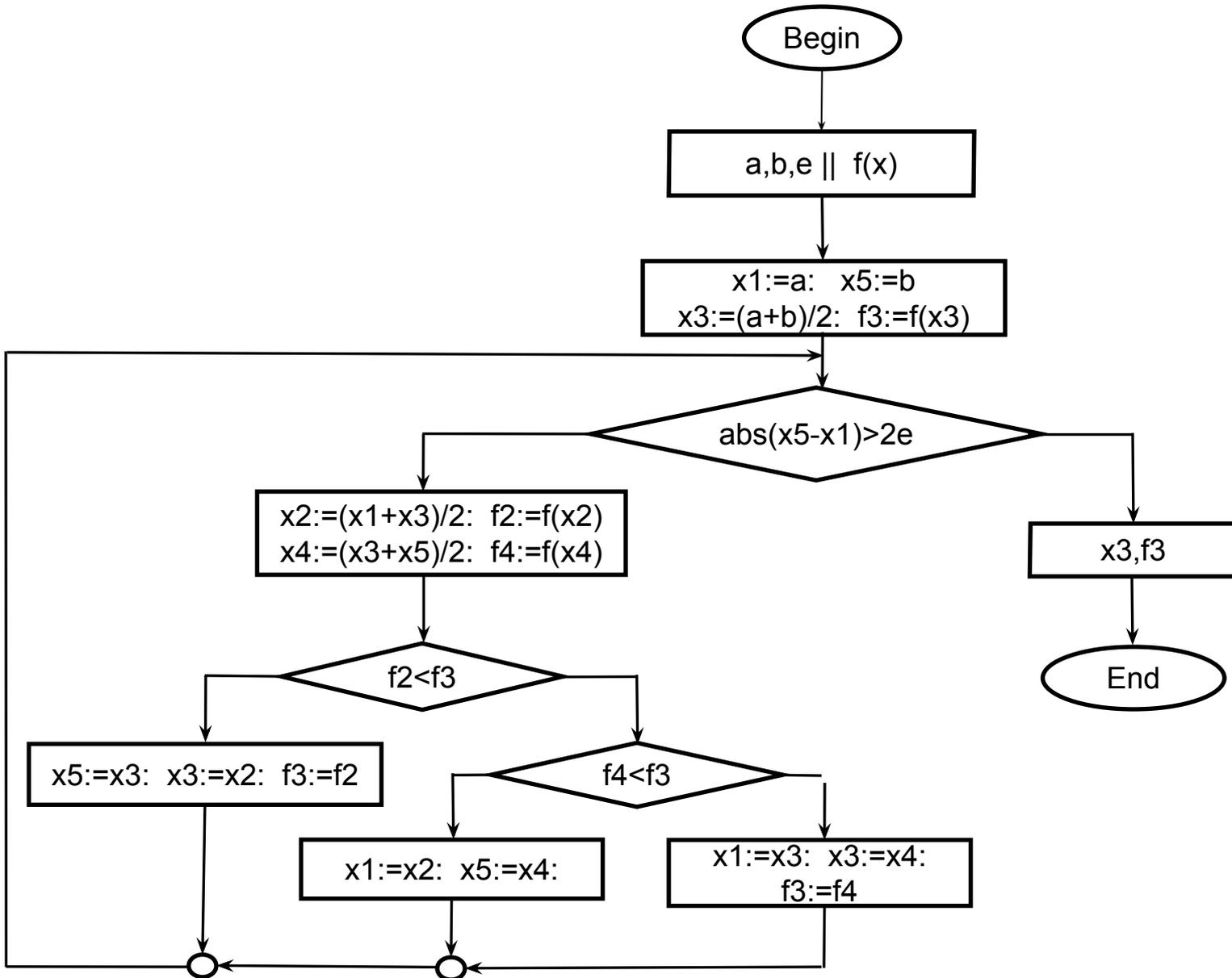
x_1	x_2	x_3	x_4	F2	F3	$ x_4-x_1 $
-1.200	-0.933	-0.667	-0.400	-2.470	-2.916	0.800
-0.933	-0.756	-0.578	-0.400	-2.861	-2.878	0.533
-0.756	-0.637	-0.519	-0.400	-2.913	-2.805	0.356
-0.756	-0.677	-0.598	-0.519	-2.914	-2.894	0.237
-0.756			-0.598			0.158
x= -0.677			f(x)= -2.914			

Попробуем увеличить долю сокращения отрезка

Метод деления отрезка пополам.

1. Дан отрезок $[a;b]$ на котором определена функция $f(x)$ и точность ε . Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек $x_1=a$ и $x_5=b$. Делим отрезок $[x_1, x_5]$ пополам и определяем точку середины $x_3=(x_5+x_1)/2$ и значение функции $F3=f(x_3)$.
2. Делим отрезок $[x_1, x_3]$ пополам и определяем точку середины $x_2=(x_1+x_3)/2$ и значение функции $F2=f(x_2)$. Делим отрезок $[x_3, x_5]$ пополам и определяем точку середины $x_4=(x_3+x_5)/2$ и значение функции $F4=f(x_4)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций $F2$ и $F3$. Если $F2 < F3$, то границы нового отрезка определим как: $x_1=x_1$, $x_5=x_3$, $x_3=x_2$ и $F3=F2$ иначе если $F4 < F3$, то $x_1=x_3$, $x_5=x_5$, $x_3=x_4$ и $F3=F4$ иначе $x_1=x_2$, $x_5=x_4$. Проверяем условие окончания итерационного процесса $|x_5-x_1| \leq 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=x_3$ и значение функции в этой точке $f(x)$. Иначе перейдем на пункт 2.

Эффективность метода $Q \approx 0,5/2 = 0,25$

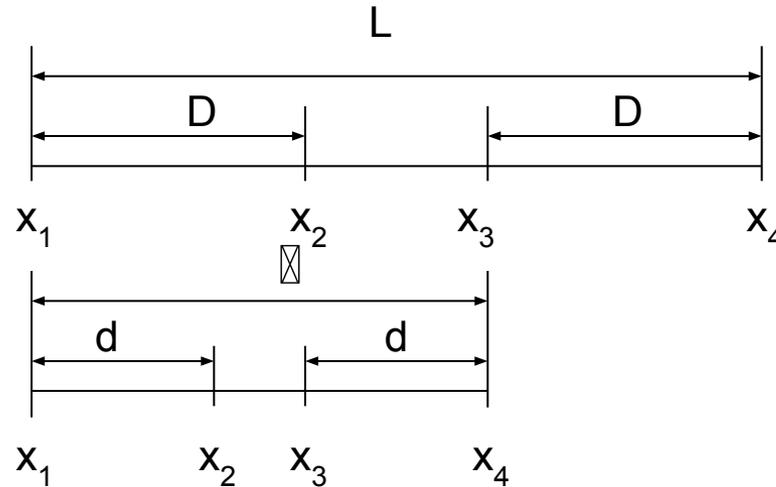


$$f(x)=3*\sin(2*x)-1.5*x-1$$

Метод половинного деления

i	x1	x2	x3	x4	x5	F2	F3	F4	x5-x1
1	-1,200	-1,000	-0,800	-0,600	-0,400	-2,228	-2,799	-2,896	0,800
2	-0,800	-0,700	-0,600	-0,500	-0,400	-2,906	-2,896	-2,774	0,400
3	-0,800	-0,700	-0,700	-0,500	-0,600	-2,906	-2,906	-2,774	0,200
		x=	-0,700			f(x)=	-2,906		

Попробуем разбивать отрезок на такие части, чтобы одну из двух точек и соответствующее значение функции мы могли использовать на следующей итерации.



$$\frac{D}{L} = \frac{d}{\square}; d = L - 2D; \square = L - D; \frac{D}{L} = \frac{(L - 2D)}{(L - D)}; DL - D^2 = L^2 - 2DL$$

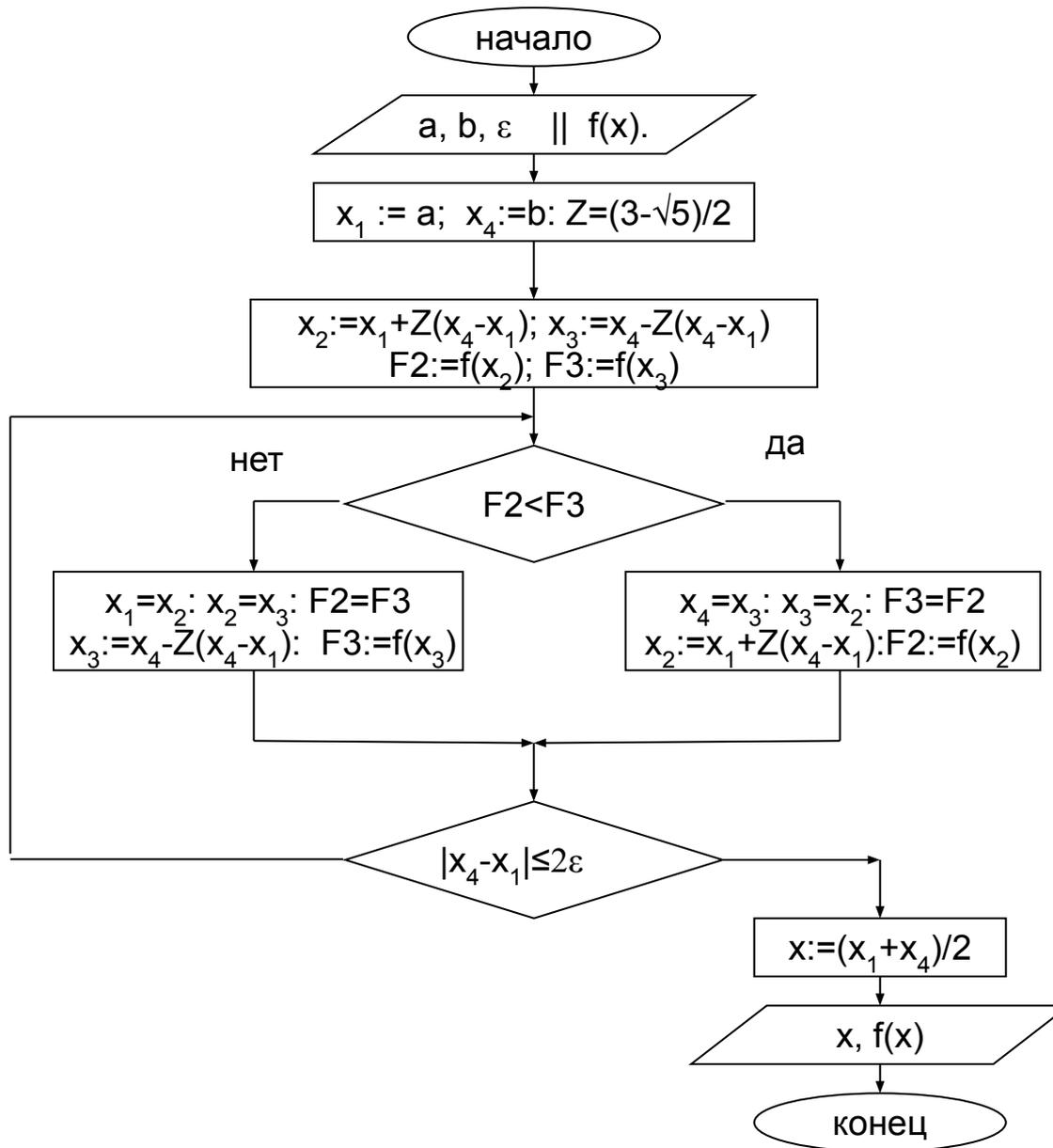
делим на L^2 $\frac{D}{L} - \left(\frac{D}{L}\right)^2 - 1 + 2 \cdot \frac{D}{L} = 0$ Заменяем $Z = \frac{D}{L}$ $Z^2 - 3Z + 1 = 0$

Решая получим $Z = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2} \approx 0.3819$

Метод Золотого сечения.

1. Дан отрезок $[a;b]$ на котором определена функция $f(x)$ и точность ε . Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек $x_1=a$ и $x_4=b$ и вычислим $Z=(3-\sqrt{5})/2$.
2. Делим отрезок на три части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций $F2$ и $F3$. Если $F2 < F3$, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, $x_4=x_3$, $x_3=x_2$, $F3=F2$ $x_2=x_1+z(x_4-x_1)$ $F2=f(x_2)$ иначе $x_1=x_2$, $x_4=x_4$, $x_2=x_3$ $F2=F3$ $x_3=x_4-z(x_4-x_1)$ $F3=f(x_3)$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $|x_4-x_1| \leq 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке $f(x)$. Иначе перейдем на пункт 3.

Введем понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычисления функции на одной итерации тогда $Q=0,3819/1 \approx 0,3819$



Метод золотого сечения $Z=0.381966$

x_1	x_2	x_3	x_4	F2	F3	$ x_4-x_1 $
-1.200	-0.894	-0.706	-0.400	-2.587	-2.903	0.800
-0.894	-0.706	-0.589	-0.400	-2.903	-2.888	0.494
-0.894	-0.778	-0.706	-0.589	-2.833	-2.903	0.306
-0.778			-0.589			0.189

x= -0.683

f(x)= -2.913

```
f=inline('3*sin(2*x)-1.5*x-1');  
[x,y]=fminbnd(f,1.2,-0.4)
```

Метод с обратным переменным шагом.

1. Дан отрезок $[a;b]$ на котором определена функция $f(x)$ и точность ε . Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Определим значения $x_{\min}=a$ и $F_{\min}=f(x_{\min})$. Вычислим начальное значение шага $h=(b-a)/5$.
2. Вычисляем значения $x=x_{\min}+h$ и $F_x=f(x)$.
3. Сравниваем значения функция в точках x и x_{\min} $F_x < F_{\min}$. Если условие выполняется, то присвоим $x_{\min} = x$, а $F_{\min} = F_x$, иначе примем $h=-h/3$
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $h \leq \varepsilon$. Если оно выполняется, то примем за решение x_{\min} и F_{\min} . Иначе перейдем на пункт 2.

