Численные методы решения дифференциальных уравнений

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения, устанавливающего связь между независимой переменной x неизвестной функцией y и ее производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, может мыть представлен следующим образом:

$$F(x, y, y', y'', \ldots.. y^{(n)}) = 0$$

Порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения. Решение дифференциального уравнения (интегрированием) является некоторая функциональная зависимость $y=y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде: $y=y(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)$, где $c_1,c_2,\ldots,c_n$ произвольные постоянные.

Решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях, называется частным решением уравнения. Постоянные $c_1,c_2,\ldots,c_n$ можно определить, задав n условий. Если эти условия заданы как совокупность значений искомой функции и всех ее производных до (n-1)ого порядка включительно в некоторой течке x_0, то задача решения уравнения называется задачей Коши, а заданные условия:

$y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0$, $y''(x_0)=y''_0,\ldots$, $y^{n-1}(x_0)=y^{n-1}{}_0$ называются начальными условия.

Если же условия заданы при нескольких значениях x, то задача решения дифференциального уравнения будет называться граничной или краевой задачей.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

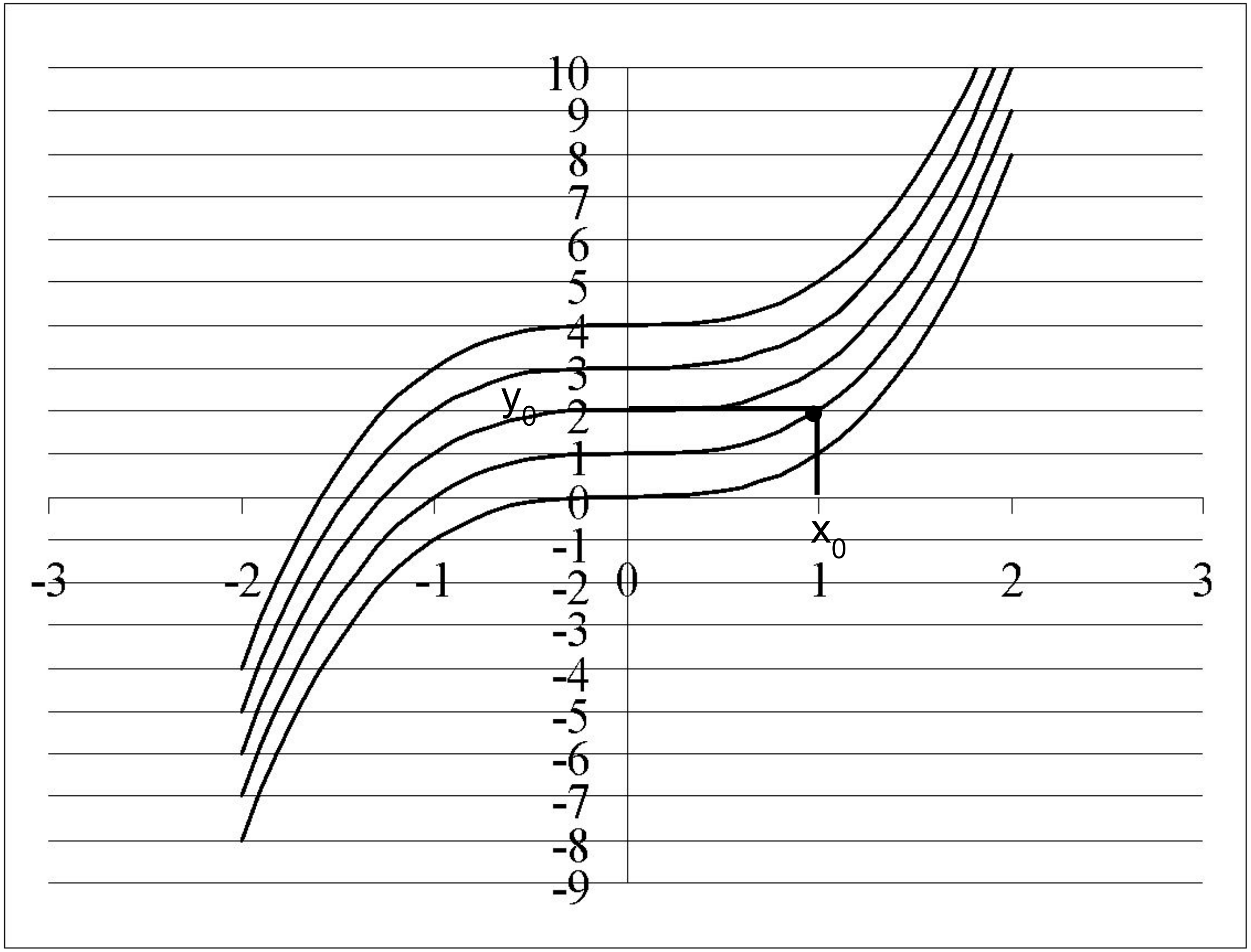
соотношение часто удается записать в виде:

$$y' = f(x, y)$$

Последнее уравнение называется дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной. Значение производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке (x,y). Функцию $f(x,y)$ будем называть правой частью дифференциального уравнения.

Общим решением уравнения будет являться семейство функций $y=y(x,c_1)$ различающихся значение постоянной c_1. Задаем одно начальное условие $y(x_0)=y_0$, которое определяет значение c_1и конкретное частное решение – задача Коши.

Для простейшего дифференциального уравнения $y'=3x^2$. Общее решение имеет вид $y=x^3+c$, а подставив в общее решение начальное условие $x_0=1$, $y_0=2$ вычислим $c=1$ и определим частное решение как: $y=x^3+1$

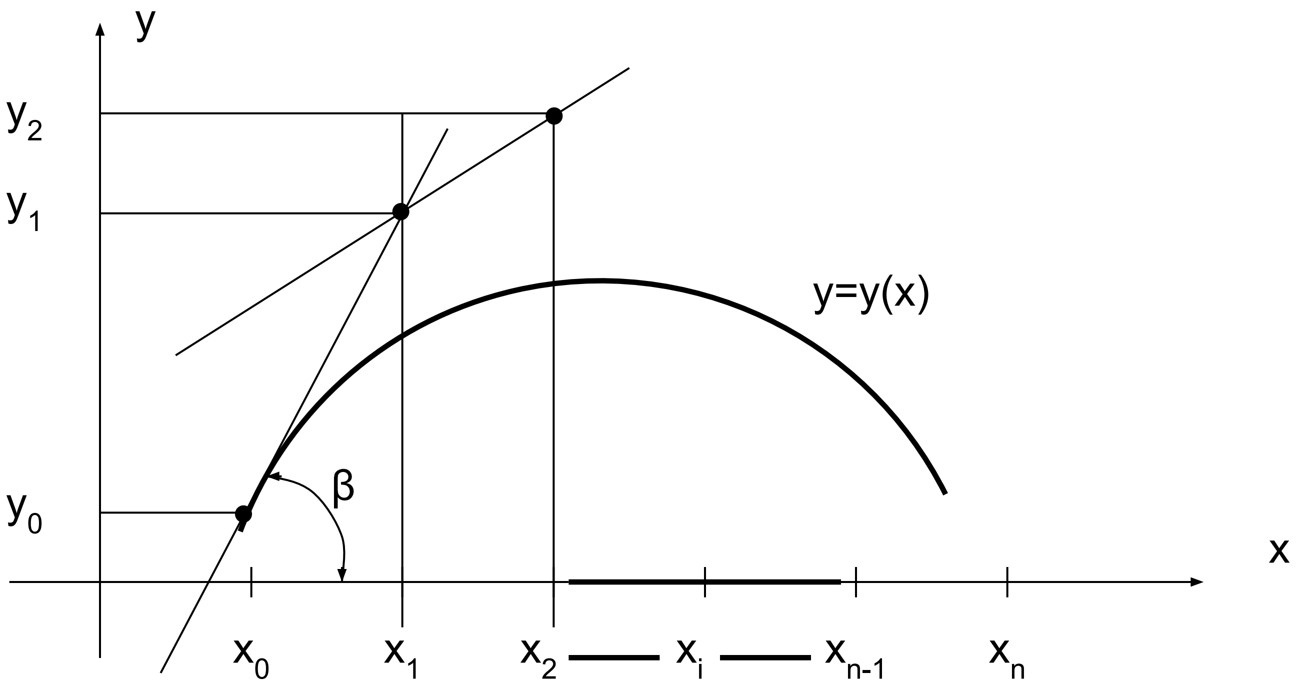


Метод Эйлера

Дано дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. Требуется найти решение на отрезке [a,b]. Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей: $x_0=a$, $x_1= a+h$, $x_2=x_1+h,\ldots,x_i=x_{i-1}+h,\ldots,x_n=b$, тогда величина шага интегрирования будет равна:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Значение функции y_1 в точке x_1 можно определить как точку пересечения касательной проведенной к функции y=y(x) в точке (x_0,y_0) с вертикальной прямой проходящей через точку x_1.



Тангенс угла наклона касательной есть значение производной в точке (x_0,y_0) и задается правой частью дифференциального уравнения, т.е. $tg(\beta)=f(x_0,y_0)$. С другой стороны из геометрического представления метода можно записать:

$$tg(\beta)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_1-y_0}{h}$$ Следовательно $$\frac{y_1-y_0}{h}=f(x_0,y_0)$$

Откуда $$y_1=y_0+h\cdot f(x_0,y_0) \qquad x_1=x_0+h$$ $$y_2=y_1+h\cdot f(x_1,y_1) \qquad x_2=x_1+h$$ и т.д.

Решение будет заключаться в последовательном применении формул:

$$y_i=y_{i-1}+h\cdot f(x_{i-1},y_{i-1})$$
$$x_i=x_{i-1}+h$$
где i = 1, 2, 3, …, n

Результат будет представлен функцией заданной таблицей.

Пример

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad a = 1; \quad b = 3; \quad n = 4; \quad h = 0.5 \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2; \quad y = \frac{C}{x} \quad C = -2$$

y_1 = -2+0.5*(-(-2/1)) = -1 x_1 = 1+0.5 =1.5

y_2 = -1+0.5*(-(-1/1.5)) = -0.667 x_2 = 1.5+0.5 =2

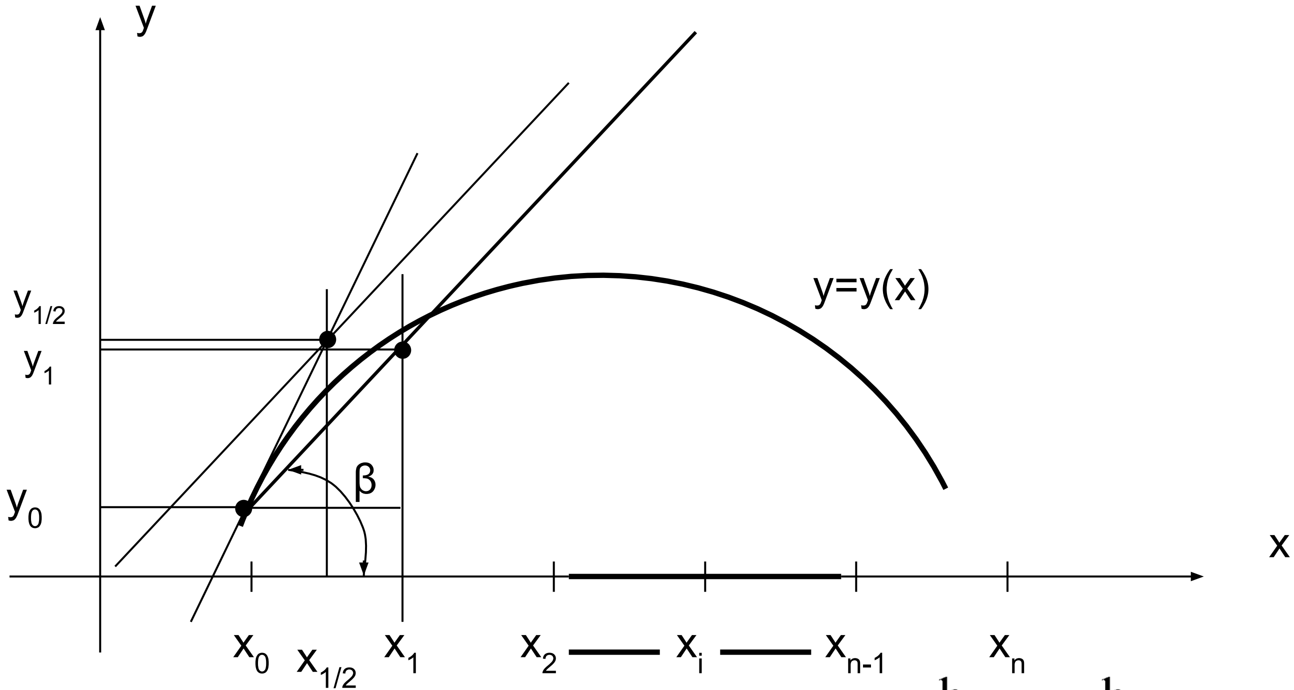
и т.д.

X	Y(Эйлер)	Y(теор)
1	-2	-2
1.5	-1	-1.333
2	-0.667	-1
2.5	-0.5	-0.8
3	-0.4	-0.667

Модифицированный метод Эйлера
Графическая интерпретация.

Определяем точку $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ и вычисляем значение функции в этой точке $y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$

Значение функции y_1 в точке x_1 определяем, как точку пересечения касательной, вычисленной в точке $(x_{1/2}, y_{1/2})$ и проведенной к функции $y=y(x)$ в точке (x_0, y_0) , с вертикальной прямой проходящей через точку x_1.



$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_{1/2}, y_{1/2}) \quad \text{или} \quad y_1 = y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)\right)$$

$$x_1 = x_0 + h$$

произвольную точку определим

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1/2}, y_{i-1/2}) \quad \text{или} \quad y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}))$$

$x_i = x_{i-1} + h$ где i = 1, 2, 3, …, n

Приме
р

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad a = 1; \quad b = 3; \quad n = 4; \quad h = 0.5 \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2; \quad y = \frac{C}{x} \quad C = -2$$

$y_{1/2}$ = -2+0.25*(-(-2/1)) = -1.5; $x_{1/2}$ = 1+0.25 = 1.25

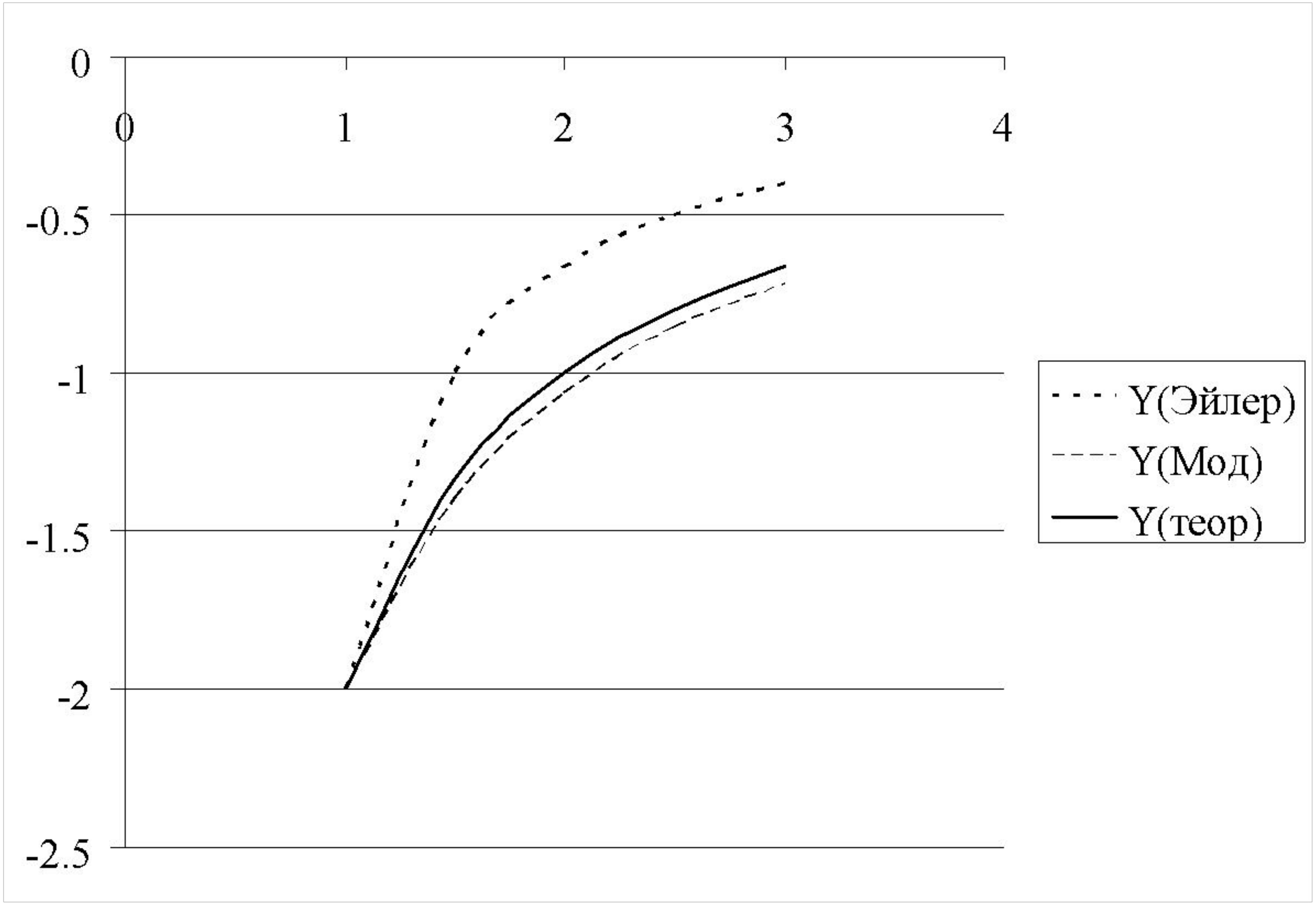
y_1 = -2+0.5*(-(-1.5/1.25)) = -1.4; x_1 = 1+0.5 = 1.5

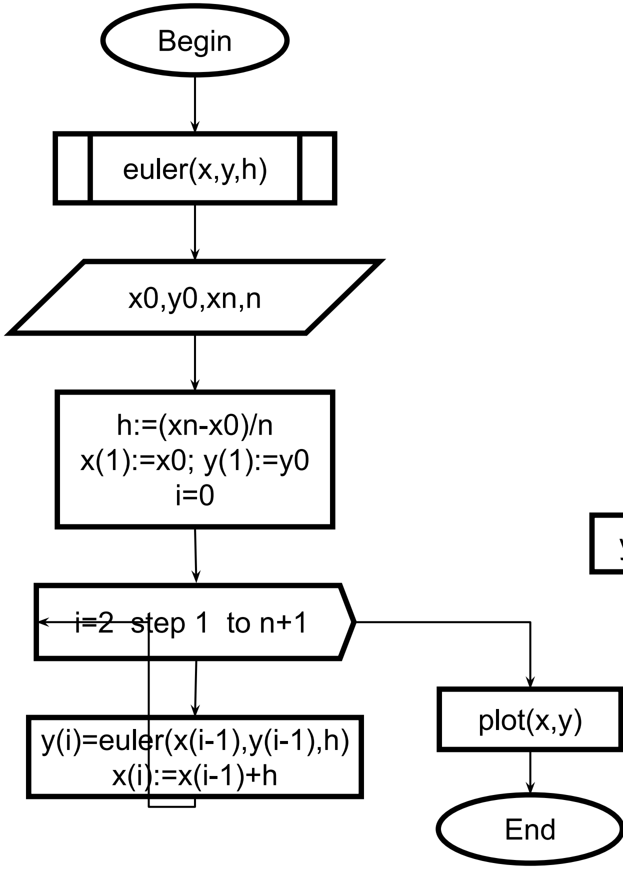
$y_{3/2}$ = -1.4 +0.25*(-(-1.4/1.5)) = -1.1667; $x_{3/2}$ = 1.5+0.25 = 1.75

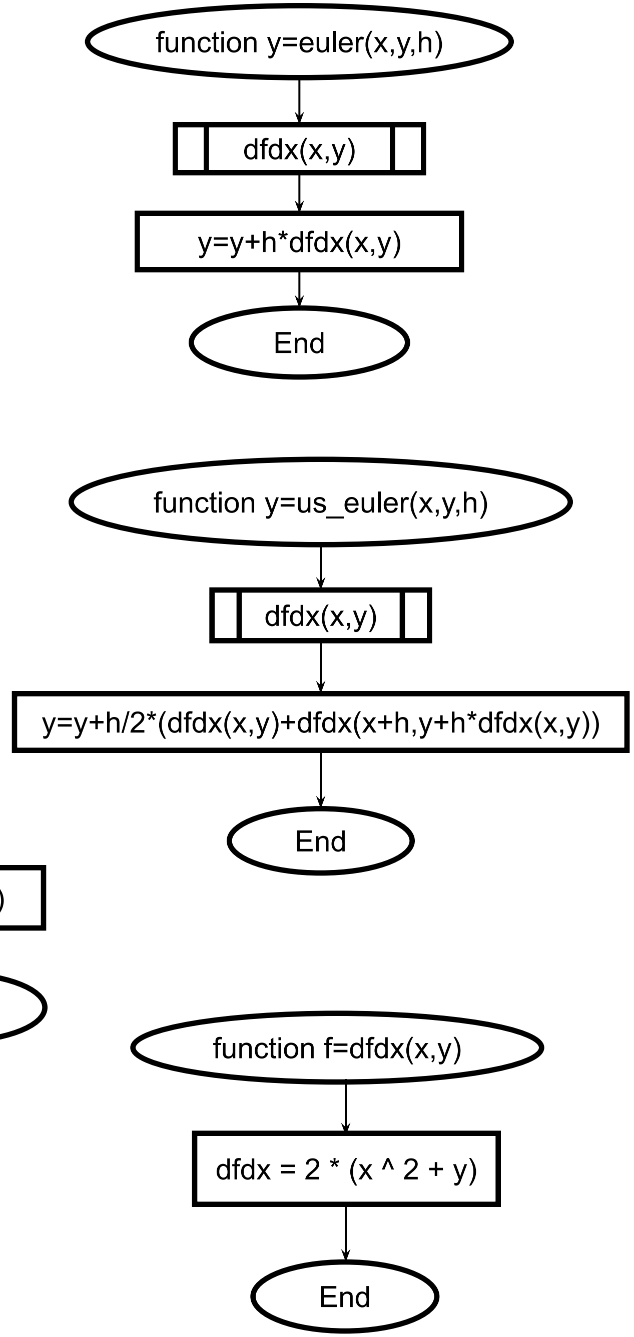
y_2 = -1.4 +0.5*(-(-1.1667/1.75)) = -1.0667; y_2 = 1.5+0.5 = 2

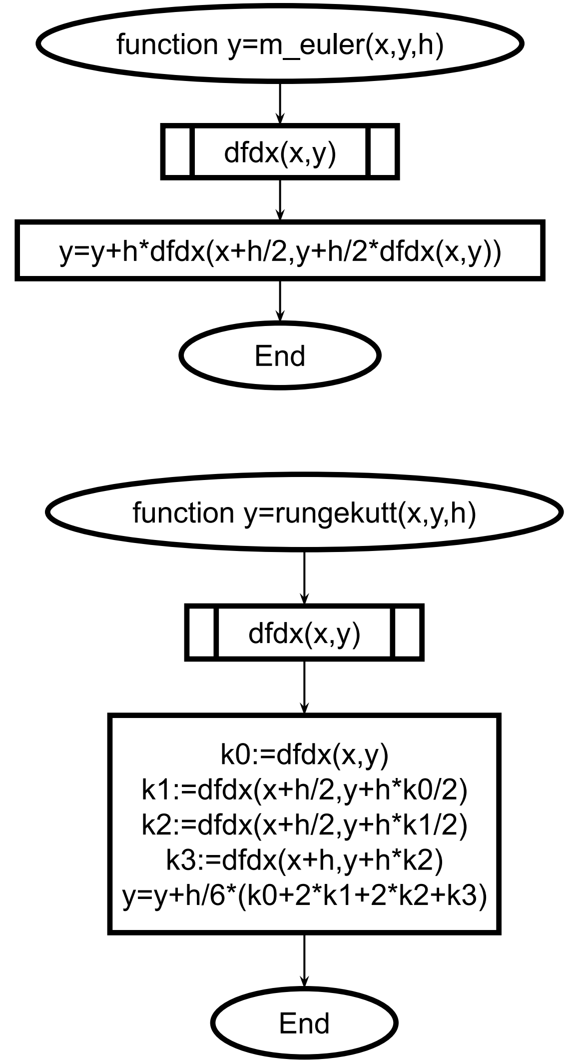
и т.д.

X	Y(мод)	Y(теор)
1	-2	-2
1.5	-1.4	-1.3333
2	-1.0667	-1
2.5	-0.8593	-0.8
3	-0.7187	-0.6667


0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
Y(Эйлер)
Y(Мод)
Y(теор)


Begin
euler(x,y,h)
x0,y0,xn,n
h:=(xn-x0)/n
x(1):=x0; y(1):=y0
i=0
i=2 step 1 to n+1
y(i)=euler(x(i-1),y(i-1),h)
x(i):=x(i-1)+h
plot(x,y)
End


function y=euler(x,y,h)
dfdx(x,y)
y=y+h*dfdx(x,y)
End
function y=us_euler(x,y,h)
dfdx(x,y)
y=y+h/2*(dfdx(x,y)+dfdx(x+h,y+h*dfdx(x,y)))
End
function f=dfdx(x,y)
dfdx = 2 * (x ^ 2 + y)
End


function y=m_euler(x,y,h)
dfdx(x,y)
y=y+h*dfdx(x+h/2,y+h/2*dfdx(x,y))
End
function y=rungekutt(x,y,h)
dfdx(x,y)
k0:=dfdx(x,y)
k1:=dfdx(x+h/2,y+h*k0/2)
k2:=dfdx(x+h/2,y+h*k1/2)
k3:=dfdx(x+h,y+h*k2)
y=y+h/6*(k0+2*k1+2*k2+k3)
End

Аналитический вывод формул

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Необходимо найти значения функции y(x) в заданных точках x_1, x_2,… x_n, если известны начальные значения (x_0, y_0), где $y_0 = y(x_0)$. Преобразуем уравнение

$$dy = f(x, y)dx$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения между x_i и x_{i+1} точкой

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \qquad y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

Интегрируем методом прямоугольники вперед

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)dx = y_i + f(x_i, y_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$$

Интегрируем методом в среднем

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})dx = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \cdot h$$

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2$$

$$y_{i+1/2} = y_i + h/2 \cdot f(x_i, y_i)$$

Интегрируем методом трапеций

$$y_{i+1} = y_i + h/2 \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= f(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \\ &\cdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \end{aligned}$$

где *x* — независимая переменная, а $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — неизвестные функции, *n* — порядок системы.

Обозначив $\vec{Y}' = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}$ $\vec{F}(x, \vec{Y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n \end{bmatrix}$ или $\vec{Y}' = \vec{F}(x, \vec{Y})$

Решением системы называется вектор-функция $\vec{Y}(x)$, которая определена и непрерывно дифференцируема на интервале (*a, b*) и удовлетворяет системе, т.е. для всех $x_o \in (a, b)$

справедливо $\vec{Y}' = \vec{F}(x, \vec{Y})$

дифференциальные уравнения n-ого порядка $y^n = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1})$

Приводим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots\cdots \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \end{aligned}$$