Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В общем виде СЛАУ можно записать в следующем виде

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{1m}x_m = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{2m}x_m = & b_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{nm}x_m = & b_n
\end{array}
$$

Совокупность коэффициентов a_{ij}, i =1,2,3,…,n; j=1,2,3,….,m системы

можно представить в виде матрицы:

$$
\overline{\overline{A}} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}
$$

Совокупность неизвестных $x_j, \quad j = 1,2,3,...,m$ - в виде вектора $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{bmatrix}$

Совокупность неизвестных $b_i, \quad i = 1,2,3,...,n$ - в виде вектора $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$

Используя выше приведенные определения, запишем СЛАУ в матричном виде:

$$\overset{=}{A}\,\vec{x} = \vec{b}$$

Решить СЛАУ значить найти такие значения вектора $\vec{x}^{*} = \begin{bmatrix} x^{*}_{1} \\ x^{*}_{2} \\ ... \\ x^{*}_{m} \end{bmatrix}$

подстановка которого в систему, обращает каждое уравнение этой системы в тождество.

Классификация СЛАУ

СЛАУ называется:

1. Переобусловленной, если n>m
2. Недообусловленой, если n<m
3. Нормальной, если n=m
4. Однородной, если вектор $\vec{b} = \vec{0}$
5. Неоднородной, если вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$
6. Если система, имеет хотя бы одно решение, она называется совместной. Система, не имеющая решений, называется несовместной.
7. Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а имеющая бесчисленное множество решений, называется неопределенной.

Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как имеет хотя бы одно решение $\vec{x} = \vec{0}$, которое называется тривиальным.

Методы решения СЛАУ

Все методы решения СЛАУ можно разделить на две группы: точные и итерационные.

Точные методы позволяют получить решение путем выполнения определённого и точного количества арифметических операций. При этом погрешность решения определяется лишь точностью представления исходных данных и точностью вычислительных операций.

Итерационные методы дают некоторую последовательность приближений к решению. Пределом этой последовательности является решение системы уравнений. Решение, возможно, определить лишь с некоторой, как правило, заданной степенью точности ε. Количество итераций для достижения требуемой точности решения определяется величиной ε, выбором начального приближения и видом системы уравнений.

Точные методы

Метод обратной матрицы

$$\overset{=}{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}\qquad \overset{=}{A}^{-1}\cdot\overset{=}{A}\cdot\vec{x}=\overset{=}{A}^{-1}\cdot\vec{b}\qquad \overset{=}{E}\cdot\vec{x}=\overset{=}{A}^{-1}\cdot\vec{b}\qquad \vec{x}^{*}=\overset{=}{A}^{-1}\cdot\vec{b}$$

x=inv(A)*b

Метод Гаусса x=A\b

Метод Гаусса включает два этапа.

Первый этап (прямой ход) заключается в последовательном исключении неизвестных из системы уравнений и состоит из n–1 шага. На первом шаге с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений начиная со второго, на втором шаге с помощью второго уравнения исключается x_2 из последующих уравнений начиная с третьего и т.д. Последним исключается x_{n-1} из последнего n-го уравнения так, что последнее уравнение будет содержать только одно неизвестное x_n. Такое последовательное исключение неизвестных равносильно приведению матрицы коэффициентов к треугольному виду. Строка, с помощью которой исключаются неизвестные, называется ведущей строкой, а диагональный элемент в этой строке – ведущим элементом.

Второй этап (обратный ход) заключается в последовательном вычислении искомых неизвестных и состоит из n шагов. Решая последнее уравнение, находим неизвестное x_n. Далее используя это значение из предыдущего уравнения вычисляем неизвестное x_{n-1} и т.д. Последним найдем неизвестное x_1 из первого уравнения.

Матрица, содержащая помимо. коэффициентов при неизвестных $\overset{=}{A}$ столбец свободных членов $\vec{b}$, называется расширенной $\overset{=}{C} = \left[\overset{=}{A} \middle| \vec{b} \right]$

Алгоритм.

1. Строим расширенную матрицу $\overline{\overline{C}}$ размерностью n на n+1, приписав, справа к матрицы $\overline{\overline{A}}$ вектор $\vec{b}$ $\quad \overline{\overline{C}} = \left[\overline{\overline{A}} \,\middle|\, \vec{b} \right]$ т.е. $c_{i,j}=a_{i,j}$, $c_{i,n+1}=b_i$, где i=1,2,3,…,n j=1,2,3,…,n

$$\overline{\overline{C}} = \left[\overline{\overline{A}} \,\middle|\, \vec{b} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{1,2} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{array} \right]$$

Задаем номер ведущей строки k = 1

2. Преобразуем все строки, расположенные ниже k-ой так, чтобы элементы $c_{ik}=0$, для этого вычисляем множитель $\beta=-c_{i,k}/c_{k,k}$ и каждую i-ую строку заменяем суммой i–ой и k-ой умноженной на β, т.е. $c_{i,j}=c_{i,j}+\beta * c_{k,j}$ где i = k+1,k+2,k+3,….,n и j = k,k+1,k+2,…,n+1
3. Проверяем k = n-1 если нет, то выбираем новую ведущую строку k=k+1 и переходим на пункт 2, иначе выполняем пункт 4.
4. Обратный ход. Из последнего n-ого уравнения определяем последнее n-ое неизвестное. $x_n=c_{n,n+1}/c_{n,n}$ Последовательно, из предыдущих уравнений начиная с i=n-1, вычисляем соответствующие неизвестные x_i. Последним, определяется первое неизвестное из первого уравнение.

$$x_i = \frac{(c_{i,n-1} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{i,j} * x_j)}{c_{i,i}}$$

Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 8.50 \\ 7.00 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 & 8.50 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 & 7.00 \end{array}\right] k=1$$

i=2 – складываем $2^{ую}$ строку с $1^{ой}$ умноженной на $\beta=-c_{21}/c_{11}=-2/4=-0.5$

i=3 – складываем $3^{ую}$ строку с $1^{ой}$ умноженной на $\beta=-c_{31}/c_{11}=-2/4=-0.5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 0.00 & 5.00 & 0.50 & 5.50 \\ 0.00 & 0.50 & 3.50 & 4.00 \end{array}\right] k=2$$

i=3 – складываем $3^{ую}$ строку с $2^{ой}$ умноженной на $\beta=-c_{32}/c_{22}=-0.5/5=-0.1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 0.00 & 5.00 & 0.50 & 5.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.45 & 3.45 \end{array}\right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные

$$x_3 = \frac{3.45}{3.45} = 1.00$$

$$x_2 = \frac{(5.50 - (0.50 \cdot 1.00))}{5.00} = 1.00$$

$$x_1 = \frac{(6.00 - (1.00 \cdot 1.00 + 1.00 \cdot 1.00))}{4.00} = 1.00$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Для уменьшения погрешности вычислений используют **модификации метода Гаусса**, которые определяются выбора«ведущего» элемента. В модификации с частичным выбором на каждом k-м шаге прямого хода в качестве «ведущего» выбирается наибольший по модулю элемент из неприведённой части k-го столбца матрицы, т.е.

$$c_{kk} = \max_{i} |c_{ik}|, \quad i = k, k+1, k+2, ..., n$$

Строка, содержащая этот элемент, переставляется с k-й строкой расширенной матрицы.

При полном выборе в качестве «ведущего» элемента выбирается максимальный по модулю элемент из всей неприведённой части матрицы коэффициентов системы:

$$c_{kk} = \max_{i,j} |c_{ij}|, \quad i, j = k, k+1, k+2, ..., n$$

Для этого осуществляется необходимая перестановка как строк, так и столбцов в расширенной матрице коэффициентов. При этом следует помнить, что перестановка столбцов равносильна переименованию неизвестных.

- Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса с частичным выбором.

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 6.000 & -1.000 \\ 2.000 & 1.000 & 5.000 \\ 5.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 10.000 \\ -10.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 5 & -1 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

На первом шаге преобразования к=1 наибольший по абсолютной величине элемент в первом столбце (5) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем первую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \end{array}\right]$$

На втором шаге преобразования к=2 наибольший по абсолютной величине элемент во втором столбце (6.2) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем вторую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 0 & 4.516 & 13.548 \end{array}\right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные. $x_3 = \dfrac{13.548}{4.516} = 3$ $\quad x_2 = \dfrac{(2+1.4\cdot 3)}{6.2} = \dfrac{6.2}{6.2} = 1$

$$x_1 = \frac{-10-((-1)\cdot 1 + 2\cdot 3)}{5} = -3$$

ответ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.

Если система плохо обусловлена, то это значит, что погрешности коэффициентов матрицы и свободных членов или погрешность округления при расчетах могут сильно исказить решение.

Исходную систему уравнений $\overset{=}{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ с учетом погрешности в векторе $\vec{b}$

Запишем как $\overset{=}{A} \cdot (\vec{x} + \Delta \vec{x}) = \vec{b} + \Delta \vec{b}$ или $\overset{=}{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} + \overset{=}{A} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ и тогда

$\overset{=}{A} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ отсюда можно выразить ошибку $\Delta \vec{x} = \overset{=}{A}^{-1} \cdot \Delta \vec{b}$

Абсолютная погрешность определим, как норму ошибки $\| \Delta \vec{x} \| = \| \overset{=}{A}^{-1} \cdot \Delta \vec{b} \|$ или $\| \Delta \vec{x} \| \le \| \overset{=}{A}^{-1} \| \cdot \| \Delta \vec{b} \|$

Определим относительную погрешность

$$\frac{\| \Delta \vec{x} \|}{\| \vec{x} \|} \le \frac{\| \overset{=}{A}^{-1} \| \cdot \| \Delta \vec{b} \|}{\| \vec{x} \|}$$

Определим $\dfrac{1}{\| \vec{x} \|}$

из исходной системы $\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ получим $\|\overline{\overline{A}}\| \cdot \|\vec{x}\| \geq \|\vec{b}\|$

далее определим

$$\frac{1}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{\|\overline{\overline{A}}\|}{\|\vec{b}\|}$$

и подставим в определение относительной погрешности получим

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|\overline{\overline{A}}^{-1}\| \cdot \|\overline{\overline{A}}\| \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Вводим понятие числа обусловленности:

$$K_{об} = \mathrm{Cond}(\overline{\overline{A}}) = \|\overline{\overline{A}}^{-1}\| \cdot \|\overline{\overline{A}}\|$$

и тогда

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq K_{об} \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Метод простых итераций

Алгоритм метода состоит из трёх этапов.

Первый этап. Приведение СЛАУ к итерационному виду, для этого разрешим каждое уравнение относительно соответствующего неизвестного:

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{nn}x_n = & b_n
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} - & \left(\, 0\, x_1 \right. & + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 & + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 & + \ldots & \left. + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right) \\
x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - & \left(\dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 \right. & + \, 0\, x_2 & + \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 & + \ldots & \left. + \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \right) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
x_n = \dfrac{d_n}{a_{nn}} - & \left(\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 \right. & + \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 & + \dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} x_3 & + \ldots & \left. + \, 0\, x_n \right),
\end{array}$$

$$\text{где } d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{при } i \neq j \end{cases} \qquad i = 1,2,3,\ldots,n;\; j = 1,2,3,\ldots,n$$

Тогда итерационную формулу запишем в виде:

$$\vec{x}^{\,k} = \vec{d} - \bar{\bar{C}} \cdot \vec{x}^{\,k-1}; \quad k = 1,2,3,\ldots$$

где вектор $\vec{d}$ – приведенный столбец свободных членов,

$\bar{\bar{C}}$ матрица – приведенная матрица коэффициентов.

Второй этап. Проверяем условие сходимости $\|\bar{\bar{C}}\| \le 1$

если условие не выполняется, то преобразуем исходную систему и выполняем 1-й этап.

Третий этап. Осуществляем уточнение решения по полученной итерационной формуле.

$\vec{x}^{k} = \vec{d} - \bar{\bar{C}} \cdot \vec{x}^{k-1}$; $k = 1,2,3,\ldots$ За начальное приближение принимается $\vec{x}^{0} = \vec{d}$

Условием окончания итерационного процесса является выполнение условия

$$\| \vec{x}^{k} - \vec{x}^{k-1} \| \le \varepsilon$$

где величина **ε** определяет точность получаемого решения

а $\vec{x}^{k}$ и $\vec{x}^{k-1}$ – смежные приближения к решению.

Пример. Решить СЛАУ методом простых итераций ε=0.4

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 8.50 \\ 7.00 \end{bmatrix}$$

Преобразуем исходную систему к итерационному виду.

$$\vec{x}^{\,k} = \vec{d} - \overline{\overline{C}} \cdot \vec{x}^{\,k-1}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \qquad \left\| \overline{\overline{C}} \right\| = 0.78 \le 1$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}^{\,0} = \vec{d}$$

$$\vec{x}^{(k)} \qquad \vec{d} \qquad \qquad \overset{=}{C} \qquad \qquad \vec{x}^{(k-1)} \qquad \vec{x}^{(k)} \qquad \vec{\Delta x} \qquad \left\|\vec{\Delta x}\right\|$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.68 \\ 0.68 \\ 0.61 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.82 \\ -0.86 \\ -1.14 \end{bmatrix} \quad 1.65$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.68 \\ 0.68 \\ 0.61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.19 \\ 1.24 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.51 \\ 0.63 \end{bmatrix} \quad 0.95$$

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.19 \\ 1.24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.89 \\ 0.86 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -0.28 \\ -0.30 \\ -0.38 \end{bmatrix} \quad 0.56$$

$$\vec{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.89 \\ 0.86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06 \\ 1.06 \\ 1.08 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.17 \\ 0.22 \end{bmatrix} \quad 0.32$$

Ответ: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.06 \\ 1.06 \\ 1.08 \end{bmatrix}$