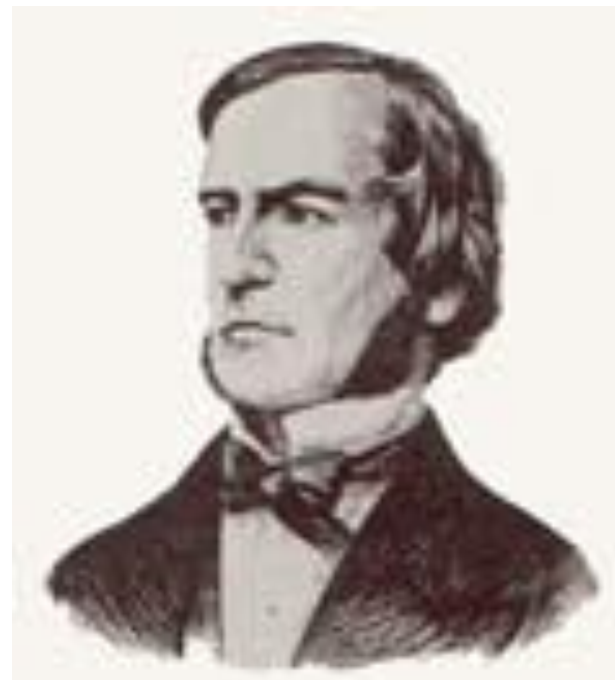
Математическая логика

Математическая логика

Математическая логика— это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Математическая логика разработана в середине XIX века английским математиком **Джорджем Булем**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.



***Логическое высказывание* — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.**

Пример:

- "*6 — четное число*"
- "*Рим — столица Франции*"

- Каждому **логическому высказыванию** сопоставляется **логическая переменная.**

Не всякое предложение является логическим высказыванием.

Пример:

- *ученик десятого класса;*
- *информатика — интересный предмет;*
- *в городе* ***А*** *более миллиона жителей* ;
- *у нее голубые глаза*.

- Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания **"не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда"** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками.**

- Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются **составными.** Высказывания, не являющиеся составными, называются **элементарными.**

Примеры

Элементарные высказывания:

- *Петров — врач;*
- *Солнце светит.*

Составные высказывания :

- *Петров — врач и шахматист* ;
- *Петров — врач или шахматист*

Логические операции

Основными логическими операциями являются операции **И, ИЛИ, НЕ.**

Им соответствуют связки **И, ИЛИ, НЕ** естественного языка.

Операция **НЕ**

выражаемая словом *"не"*, называется **отрицанием** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком).

Высказывание истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

Пример. "*Луна — спутник Земли*" (А); "*Луна — не спутник Земли*" ().

Операция **И**

- выражаемая связкой *"и"*, называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой **" . "** (может также обозначаться знаками ∧ или **&**).
- Высказывание **А ∧ В** истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания **А** и **В** истинны.
- Например, высказывание *"10 делится на 2 и 5 больше 3"* истинно, а высказывание *"10 делится на 2 и 5 не больше 3",* — ложно.

Операция **ИЛИ**

- выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **v** (или плюсом).

- Высказывание **A v B** ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

- Например, высказывание *"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"* ложно, а высказывание *"10 делится на 2 или 5 больше 3"*, — истинно.

Операция **ЕСЛИ-ТО**

выражаемая связками *"если ..., то", "из ... следует", "... влечет ..."*, называется **импликацией** (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком →.

Высказывание **A** → **B** ложно тогда и только тогда, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Замечание

- В обычной речи связка *"если ..., то"* описывает причинно-следственную связь между высказываниями. Но в логических операциях смысл высказываний не учитывается. Рассматривается только их истинность или ложность. Поэтому импликации, образоваться высказываниями, совершенно не связанными по содержанию.

Примеры импликаций

если президент США — демократ, то в Африке водятся жирафы;

если арбуз — ягода, то в бензоколонке есть бензин.

Операция **РАВНОСИЛЬНО**

- выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "... *равносильно* ...", называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или **~.** Высказывание **A** $\leftrightarrow$ **B** истинно тогда и только тогда, когда значения **A** и **B** совпадают.

Примеры

- высказывания *"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 3"*, *"23 делится на 6 тогда и только тогда, когда 23 делится на 3"* истинны;
- высказывания *"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 5"*, *"21 делится на 6 тогда и только тогда, когда 21 делится на 3"* ложны.

- Высказывания **A** и **B,** образующие составное высказывание **A**↔**B** , могут быть совершенно не связаны по содержанию, например: *"три больше двух"* (**A**), *"пингвины живут в Антарктиде"* (**B**). Отрицаниями этих высказываний являются высказывания *"три не больше двух"* (**¬A**), *"пингвины не живут в Антарктиде"* (**¬B**). Образованные из высказываний **A** и **B** составные высказывания **A**↔**B** и **¬A** ↔ **¬B** истинны, а высказывания **¬A** ↔ **B** и **A** ↔ **¬B** — ложны.

Таблицы истинности логических операций

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

x	¬x
0	1
1	0

- Число различных бинарных функций = 16 ?

Логическая формула

- С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить логической формулой.
- Можно говорить о вычислении логического высказывания в смысле вычисления эквивалентной ему логической формуле.

Порядок вычисления логических операций

1. Отрицание
2. Конъюнкция
3. Дизъюнкция
4. Импликация, эквивалентность.

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	Для ИЛИ	Для И
Переместительный	$x \vee y = y \vee x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Сочетательный	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Распределительный	$x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$	$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$
Правила де Моргана	$\overline{x \vee y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$	$\overline{x \cdot y} = \overline{y} \vee \overline{x}$
Идемпотенции	$x \vee x = x$	$x \cdot x = x$
Поглощения	$x \vee (x \cdot y) = x$	$x \cdot (x \vee y) = x$
Склеивания	$(x \cdot y) \vee (\overline{x} \cdot y) = y$	$(x \vee y) \cdot (\overline{x} \vee y) = y$
Операция переменной с ее инверсией	$x \vee \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Операция с константами	$x \vee 0 = x;\ x \vee 1 = 1$	$x \cdot 1 = x;\ x \cdot 0 = 0$
Двойного отрицания	$\overline{\overline{x}} = x$	

Вычислить формулу $z=\neg x\wedge y\vee\neg(x\vee y)\vee x$

x	**y**	**¬x**	**¬x∧y**	**x∨y**	**¬(x∨y)**	**¬x∧y∨¬(x∨y)**	**¬x∧y∨¬(x∨y)∨x**
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1

Таблица истинности для формулы $\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$:

Переменные		Промежуточные логические формулы				Формула
x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{y}$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \overline{y})$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Упрощение формул алгебры логики

1) $\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot (x \cdot \bar{y}) = \bar{x} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} = 0 \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} = 0 \cdot \bar{y} = 0$

(законы алгебры логики применяются в следующей последовательности: правило де Моргана, сочетательный закон, правило операций переменной с её инверсией и правило операций с константами);

2) $\bar{x} \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x = \bar{x} \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x = \bar{x} \cdot (y \vee \bar{y}) \vee x = \bar{x} \vee x = 1$

(применяется правило де Моргана, выносится за скобки общий множитель, используется правило операций переменной с её инверсией);

3) $(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee y)\ (\bar{x} v y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) = y \cdot \bar{x}$

(**повторяется** второй **сомножитель**, что разрешено законом идемпотенции; затем комбинируются два первых и два последних сомножителя и используется закон склеивания);

4)
$$x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot z = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot z \cdot (y \vee \bar{y}) =$$
$$= x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z = (x \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z) \vee (\bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot y \cdot z) =$$
$$= x \cdot \bar{y} \vee y \cdot z$$

(**вводится вспомогательный логический сомножитель** ($y \vee \bar{y}$); затем комбинируются два крайних и два средних логических слагаемых и используется закон поглощения);

Связь между алгеброй логики и двоичным кодированием

- Математический аппарат алгебры логики описывает функционирование аппаратных средств компьютера.
- Из этого следует два вывода:
- одни и те же устройства компьютера могут применяться для обработки и хранения как числовой информации, представленной в двоичной системе счисления, так и логических переменных;
- на этапе конструирования аппаратных средств алгебра логики позволяет значительно упростить логические функции, описывающие функционирование схем компьютера, и, следовательно, уменьшить число элементарных логических элементов.