Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 4.
ТЕОРЕМЫ О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС И ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Кафедра теоретической механики

План лекции

Введение

1. **Теорема о движении центра масс**
2. **Законы сохранения движения центра масс**
3. **Количество движения (импульс) системы**
4. **Импульс силы**
5. **Теорема об изменении количества движения (импульса)**
6. **Рекомендации к решению задач**
7. **Примеры применения теорем**

Заключение

На предыдущей лекции

- **Определили понятие механической системы**

- **Познакомились с основными ее характеристиками: массой, центром масс, моментом инерции относительно оси**

- **Определили меры движения: центр масс, количество движения (импульс), момент количества движения (момент импульса), кинетическую энергию**

Цель лекции

Изучить теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения

НАПОМНИМ: МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ

1 – центр масс системы

$$\vec{r}_C = (\sum m_k \vec{r}_k) / M$$

2 – количество движения (импульс) системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{\mathrm{v}}_k$$

3 – момент количества движения (момент импульса) системы

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_k \vec{\mathrm{v}}_k)$$

4 – кинетическая энергия системы

$$T = \sum (\frac{1}{2} m_k \mathrm{v}_\mathrm{k}^2)$$

Напомним:

Движение механической системы мы будем изучать по поведению ее характеристик (мер движения) - центра масс, количества движения, момента количества движения, кинетической энергии

Поведение же этих характеристик будет определяться теоремами об их изменении со временем.

На этой лекции мы изучим первые две теоремы:

1. **Теорему о движении центра масс**
2. **Теорему об изменении количества движения**

Теорема о движении центра масс

Возьмем в качестве механической системы рой пчел (1000-6000). У нас нет возможности проследить за полетом каждой из пчел. Однако, чтобы ответить на вопрос: “куда полетели пчелы? ”, лучшей точки, чем центр масс этого роя не найти!

ДУ движения механической системы

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i \qquad (1)$$

Суммируем левые и правые части уравнений

$$\sum_k m_k \mathbf{a}_k = \sum_k \mathbf{F}_k^e + \sum_k \mathbf{F}_k^i \qquad (2)$$

$\sum_k \mathbf{F}_k^i = 0$ - по свойству внутренних сил

Теорема о движении центра масс

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum\limits_k m_k \mathbf{r}_k}{M} \quad □ \quad \sum_k m_k \mathbf{r}_k = M\mathbf{r}_C$$

после двойного дифференцирования

$$\sum_k m_k \mathbf{a}_k = M\mathbf{a}_C$$

Подставляя в (2), получим ***теорему о движении центра масс***

$$M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e \qquad (3)$$

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно сумме всех действующих на систему внешних сил

Теорема о движении центра масс

Аналогия со 2-м законом Ньютона для точки:

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

При движении твердого тела теорема полностью определяет поступательную часть движения вместе с центром масс **С**. Вращательную часть движения вокруг **С** нам определит теорема об изменении момента количества движения (следующая лекция).

Теорема позволяет при определении движения центра масс любой механической системы исключить наперед неизвестные внутренние силы

Законы сохранения движения центра масс

Из *теоремы о движении центра масс* можно получить следующие важные следствия:

1. Пусть сумма внешних сил равна нулю $\sum\limits_k \mathbf{F}_k^e = 0$

Тогда из уравнения $M\mathbf{a}_C = \sum\limits_k \mathbf{F}_k^e$

следует $\mathbf{a}_C = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_C = \mathbf{const}$

Если сумма внешних сил, действующих на механическую систему равна нулю, то ее центр масс движется равномерно прямолинейно.

В частности, если в начальный момент центр масс был в покое, то он и останется в покое.

Законы сохранения движения центра масс

2. Пусть сумма проекций внешних сил на ось **X** равна нулю

$$\sum_k F_{kx}^e = 0$$

Тогда

$$M\mathbf{a}_{CX} = 0 \Rightarrow \mathrm{v}_{\mathrm{Cx}} = const$$

Если сумма проекций всех действующих внешних сил на ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось не меняется

В частности, если в начальный момент скорость центра масс системы вдоль оси равна нулю, то центр масс системы вдоль этой оси перемещаться не будет

Следствие. ***Пара сил***, *приложенная к твердому телу,* ***не может изменить движение его центра масс*** (она может только вызвать вращение тела вокруг центра масс).

Примеры

1. *Движение человека.* Механическая система: человек и Земля. Сила сцепления между подошвами обуви и Землей – внутренняя. Поэтому *центр масс системы* “человек + Земля” должен остаться в покое.

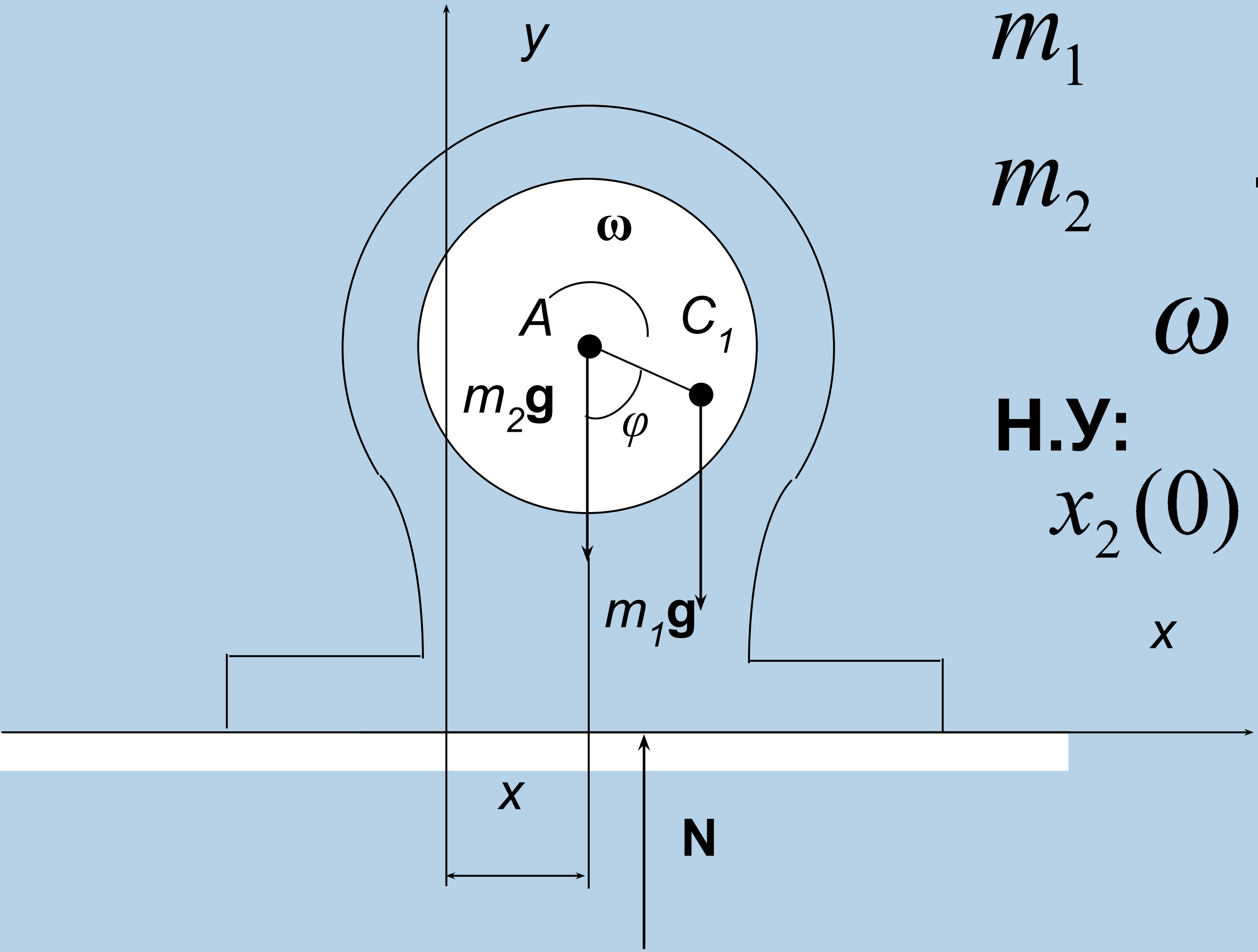
2. *Откат орудия при выстреле.* Механическая система: орудие и снаряд. Если снаряд вылетает вперед, то орудие, если оно не закреплено, откатывается назад.

3. *Вращающиеся тела со смещенным центром масс.* Вращающиеся части конструкций обычно “центруют” так, чтобы, в частности, их центры масс находились на оси вращения.

Примеры (продолжение)

4. Почему нельзя поднять самого себя за волосы?
5. А почему другой человек сможет?
6. Прыжок с вышки в бассейн “солдатиком”
7. То же самое, только с гирей в руках

Задача 1



m_1 - масса вала

m_2 - масса машины

$$\omega = const$$

Н.У:

$$x_2(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0$$

$AC_1 = b$ - смещение центра масс вала от оси **A**

Определить закон движения мотора и его давление **N** на подставку

Задача (продолжение)

Механическая система: мотор + вал

Внешние силы: $m_1\mathbf{g}$ $\quad m_2\mathbf{g}$ $\quad \mathbf{N}$

$$M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e$$ ***- теорема***

$$x: \quad (m_1 + m_2)\ddot{x}_C = 0$$

$$y: \quad (m_1 + m_2)\ddot{y}_C = -(m_1 + m_2)g + N$$

Центр масс всей системы вдоль оси x двигаться не будет:

$$\ddot{x}_C = 0 \qquad \mathrm{v}_{Cx} = \dot{x}_C = 0 \qquad x_C = 0$$

$$x_C = \left[m_1(x_2 + b\sin\omega t) + m_2 x_2\right]/M = 0$$

Задача (продолжение)

$$x_2 = -m_1 b \sin \omega t / (m_1 + m_2)$$

Следовательно, *мотор будет совершать гармонические колебания*

Реакцию N найдем из второго уравнения

$$N = (m_1 + m_2)\ddot{y}_C + (m_1 + m_2)g$$

$$y_c = (\sum_k m_k y_k)/M = (m_1(y_A - b\cos\omega t) + m_2 y_A)/(m_1 + m_2)$$

$y_A = const$ - мотор не отрывается от земли

$$N = (m_1 + m_2)g + b m_1 \omega^2 \cos\omega t$$

статическое + динамическое давление

$b\omega^2 > (m_1 + m_2)g / m_1$ - мотор подпрыгивает

Понятно, почему вибрируют стиральные машины!

Количество движения (импульс) системы

$$\mathbf{Q} = \sum_k m_k \mathbf{v}_k \qquad (4)$$

Количеством движения (импульсом) механической системы будем называть векторную величину, равную сумме количеств движения всех ее точек

$q_k = m_k \mathbf{v}_k$ *- количество движения k-ой точки*

Единицей измерения в СИ является 1 кг*м/с

Количество движения (импульс) системы

Из определения центра масс

$$\sum_k m_k \mathbf{r}_k = M\mathbf{r}_C$$

Дифференцируем это равенство по времени

$$\sum_k m_k \mathbf{v}_k = M\mathbf{v}_C$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C \qquad (5)$$

Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Другими словами, количество движения всей системы равно количеству движения ее центра масс, если в ней сосредоточить всю массу системы

Проекции количества движения системы

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C \qquad (5)$$

$$Q_x = m_k \mathrm{v}_{\mathrm{kx}} = M\mathrm{v}_{\mathrm{Cx}}$$

$$Q_y = m_k \mathrm{v}_{\mathrm{ky}} = M\mathrm{v}_{\mathrm{Cy}} \qquad (6)$$

$$Q_z = m_k \mathrm{v}_{\mathrm{kz}} = M\mathrm{v}_{\mathrm{Cz}}$$

Вспомним кинематику: движение твердого тела складывается из поступательного (вместе с С) и вращательного (вокруг С).

Из (5) следует, что при вращательном движении вокруг С количество движения равно нулю.

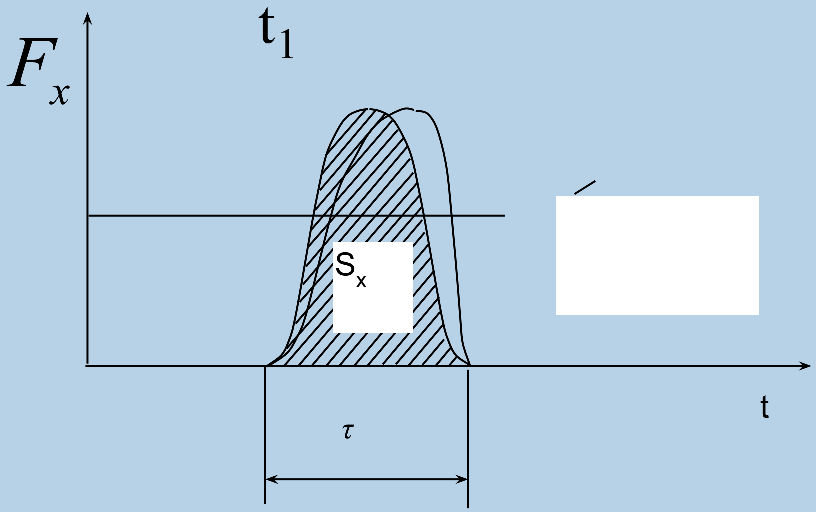
Следовательно, *количество движения системы характеризует ее поступательное движение вместе с центом масс*

Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие *импульса силы*

$$d\mathbf{S} = \mathbf{F}dt$$ *- элементарный импульс силы* (7)

$$\mathbf{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt$$ *- импульс силы* (8)



$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt$$

Единицей измерения в СИ является 1 кг*м/с

Проекции импульса силы

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt \qquad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt \qquad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$$

В частном случае: $F_x = const$

$$S_x = F_x(t_2 - t_1)$$

В случае приложения нескольких сил:

$$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \ldots + \mathbf{S}_n$$

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + \ldots + S_{nx}$$

Теорема об изменении количества движения (импульса) системы

$$\mathbf{Q} = M\mathbf{v}_C \qquad (5)$$

Дифференцируем равенство (5) по времени

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}_C}{dt} = M\mathbf{a}_C$$

Согласно теореме о движении центра масс

$$M\mathbf{a}_C = \sum_k \mathbf{F}_k^e$$

следовательно получим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k^e \qquad (9)$$

Теорема об изменении количества движения (импульса) системы

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k^e \qquad (9)$$

- дифференциальная форма

Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору действующих на нее внешних сил

Теорема чаще используется в интегральной форме

$$\mathbf{Q}(t_2) - \mathbf{Q}(t_1) = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k^e(t)dt = \sum_k \mathbf{S}_k^e \qquad (10)$$

Изменение импульса за промежуток времени равно сумме импульсов действующих на нее внешних сил за тот же промежуток

Теорема об изменении количества движения в проекциях

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_k S_{kx}^e$$

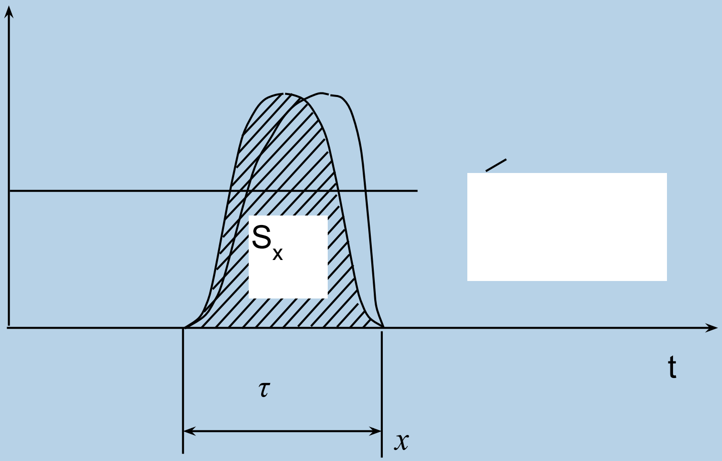
$$Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_k S_{ky}^e \qquad (11)$$

$$Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_k S_{kz}^e$$

- *внутренние силы* непосредственно не могут влиять на изменение импульса системы

- *механическую систему* выбирают так, чтобы наперед неизвестные *силы* сделать *внутренними*

Теорема об изменении количества движения



Замечание.

Импульс системы меняют не сами силы, а импульсы сил

Например, изменение проекции импульса системы за время τ

полностью определяется

площадью

заштрихованной фигуры,

$$S_x$$

и не зависит от вида кривой

$$F_x = F_x(t), t \in (t_1, t_2)$$

Закон сохранения количества движения

1. Пусть сумма внешних сил равна нулю $\sum_k \mathbf{F}_k^e = 0$

Тогда из уравнения $$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_k^e$$

следует $$\mathbf{Q} = \mathbf{const} \qquad (12)$$

Если сумма внешних сил, действующих на механическую систему равна нулю, то вектор количества движения сохраняется во все время движения

Если за некоторый промежуток времени сумма импульсов внешних сил равна нулю

$$\sum_k \mathbf{S}_k^e = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_k^e(t)dt = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}(t_2) = \mathbf{Q}(t_1)$$

Закон сохранения количества движения

2. Пусть проекции внешних сил на **X** равны нулю

$$\sum_k F_{kx}^e = 0$$

Тогда из уравнения $\dfrac{dQ_X}{dt} = \sum_k \mathbf{F}_{kx}^e$

следует $Q_x = const$

Если сумма проекций всех действующих на систему внешних сил на ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось сохраняется во времени

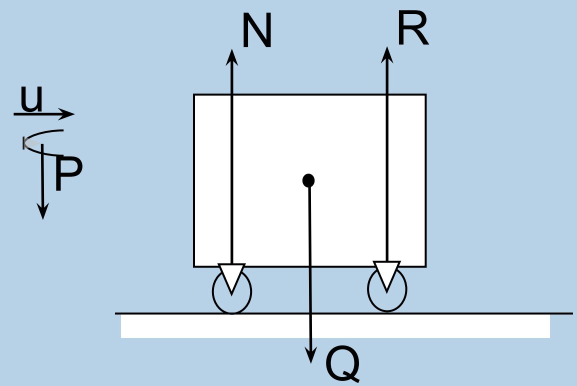
Если равна нулю проекция суммы импульсов внешних сил за промежуток времени

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt = 0 \Rightarrow \qquad Q_x(t_2) = Q_x(t_1)$$

Рекомендации к решению задач на применение общих теорем динамики

1. ***Выбрать механическую систему*** (удачно!)
2. ***Изобразить все нужные силы*** (активные и реакции связей)
3. ***Записать одну из общих теорем динамики (или несколько)***
4. ***Проинтегрировать полученную систему уравнений.*** Постоянные интегрирования определяются при этом из дополнительных (*начальных*) *условий задачи*
5. ***Определить искомые величины***

Задача 2 Пуля весом P, летящая горизонтально со скоростью u, попадает в тележку с песком веса Q и застревает в ней. С какой скоростью будет двигаться тележка? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение. 1. Механическая система: пуля + тележка

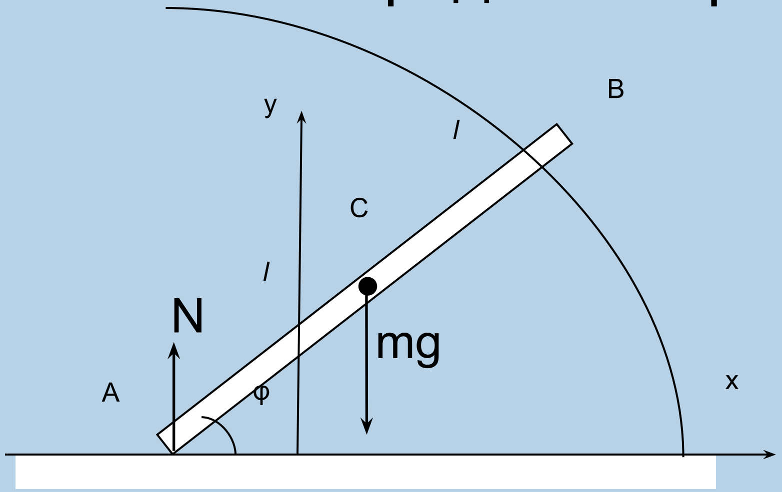
2. Внешние силы, действующие на систему **P**,**Q**,**N**,**R**.

3. Запишем теорему об изменении количества движения системы в проекции на горизонтальную ось x.

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum F_{kx}^{e} = 0 \Rightarrow Q_{2x} = Q_{1x}$$

$$Q_{1x} = Pu/g; \quad Q_{2x} = (P+Q)\mathrm{v}/\mathrm{g} \Rightarrow \mathrm{v} = Pu/(P+Q)$$

Задача 3 Однородный стержень АВ длиной 2L, опирающийся нижним концом А на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать из состояния покоя, образуя при t=0 угол α с плоскостью. Определить траекторию верхнего конца В стержня.



Решение. 1. М.с. – стержень АВ; 2. Внешние силы **N**, m**g**;

3. Теор. о дв. центра масс: $x_C = const = x_C(0) = L\cos\alpha$

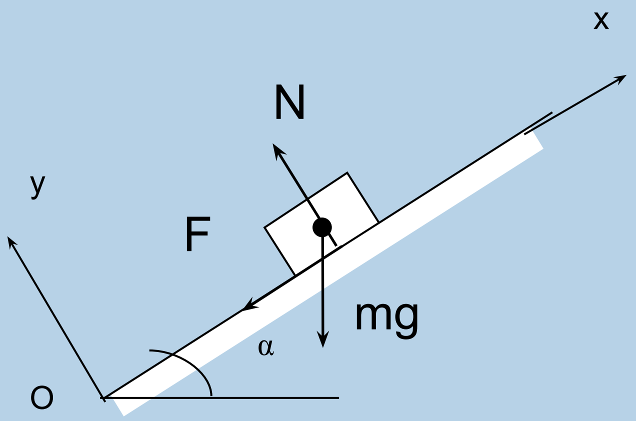
$$x_B = x_C + L\cos\varphi = L\cos\alpha + L\cos\varphi; \quad y_B = 2L\sin\varphi$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Leftrightarrow (x_B - \cos\alpha)^2 / L^2 + y_B^2 / 4L^2 = 1$$

Траектория т. В – эллипс;

$$(L\cos\alpha, 0) - центр; \quad L, 2L - полуоси$$

Задача 4 Тело поднимается по наклонной плоскости с углом наклона α имея начальную скорость v_0. Определить время подъема на максимальную высоту, если коэффициент трения о плоскость равен f.



Решение. По теореме об изменении кол-ва движения в проекции на ось x:

$$m\mathrm{v}(\mathrm{t_k}) - m\mathrm{v}(0) = \text{-}(\mathrm{F} + \mathrm{mgsin}\alpha)\mathrm{t_k}$$

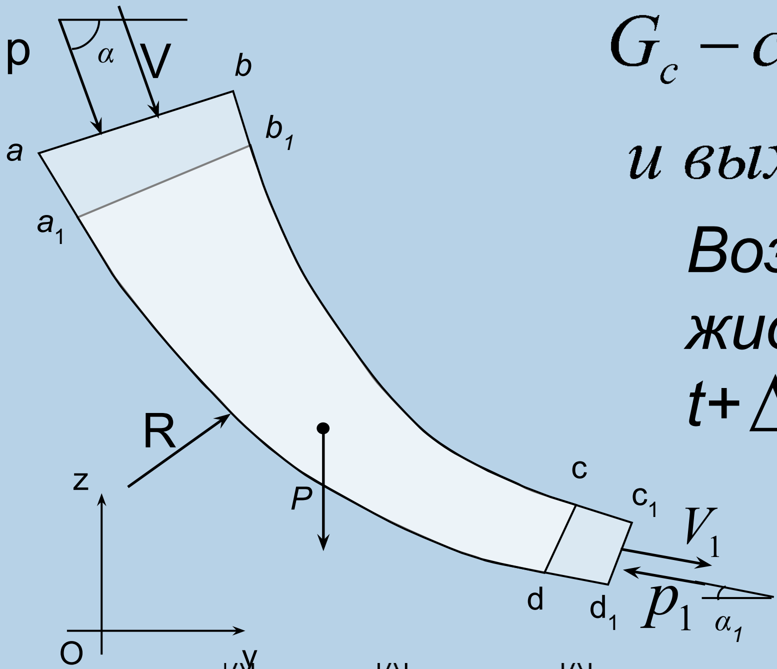
Имеем: $\mathrm{v}(\mathrm{t_k}) = 0;\ \mathrm{v}(0) = \mathrm{v}_0 \Rightarrow t_k = m\mathrm{v}_0/(F + mg\sin\alpha)$

Силу трения определим из второго закона Ньютона в проекции на ось y:

$$0 = \mathrm{N} - \mathrm{mgcos}\alpha \Rightarrow F = fN = fmg\cos\alpha$$

Следовательно, $t_k = \mathrm{v}_0 / g(f\cos\alpha + \sin\alpha)$

Задача 5 (установившееся течение жидкости в трубе)



G_c – секундный расход, S, S_1 – входное и выходное сечения трубы

Возьмем в качестве М.С. – объем жидкости abcd (в момент t). В момент $t+\Delta t$ он займет положение $a_1b_1c_1d_1$

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \vec{Q}_{cdc_1d_1} - \vec{Q}_{aba_1b_1} = m_{cdc_1d_1}\vec{V}_1 - m_{aba_1b_1}\vec{V}$$

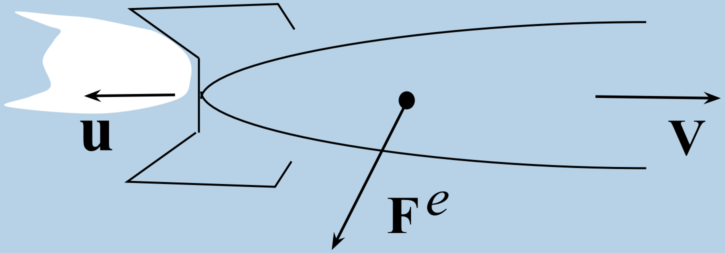
$$m_{cdc_1d_1} = m_{aba_1b_1} = G_c\Delta t \Rightarrow \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = G_c(\vec{V}_1 - \vec{V})\Delta t$$

По теореме об изменении импульса имеем:

$$G_c(\vec{V}_1 - \vec{V})\Delta t = (\vec{P} + \vec{N} + \vec{p}S + \vec{p}_1 S_1)\Delta t$$

Зная $P, p, p_1, S, S_1, V, V_1, \alpha, \alpha_1$ найдем $\vec{R} = (R_y, R_z)$

Задача 6 (движение ракеты)



$m = m(t)$ – *непрерывно дифф.*

М.С. – ракета с оставшимся в ней горючим на время t:

$$\vec{Q}(t) = m(t)\vec{V};\ \vec{Q}(t+\Delta t) = (m(t)+\Delta m)(\vec{V}+\Delta\vec{V}) + (-\Delta m)\vec{V}_1$$

$(-\Delta m)$ – *масса продуктов сгорания*, $\vec{V}_1$ – *их скорость*

$$\vec{V}_1 = \vec{u} + (\vec{V}+\Delta\vec{V});\ \vec{u} \text{ – относительная скорость}$$

Поэтому $\vec{Q}(t+\Delta t) = m(t)(\vec{V}+\Delta\vec{V}) - \Delta m\vec{u}$

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}(t+\Delta t) - \vec{Q}(t) = m(t)\Delta\vec{V} - \Delta m\vec{u} \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{Q}/\Delta t = m(t)\Delta\vec{V}/\Delta t - (\Delta m/\Delta t)\vec{u} \Rightarrow$$

$$\vec{F}^e = d\vec{Q}/dt = m\,d\vec{V}/dt - (dm/dt)\vec{u} \Rightarrow$$

$$m\dot{\vec{V}} = \vec{F}^e + \dot{m}\vec{u} \text{ - уравнение Мещерского}$$

$$\vec{\Phi} = \dot{m}\vec{u} = -G_{сек}\vec{u} \text{ – реактивная сила}$$

Заключение

1. Изучена теорема о движении центра масс и ее частные случаи - законы сохранения движения центра масс
2. Определено понятие импульса силы
3. Изучена теорема об изменении количества движения (импульса) и ее частные случаи – законы сохранения импульса
4. Даны рекомендации к решению задач на применение общих теорем динамики
5. Рассмотрены примеры решения задач с использованием этих рекомендаций

Вопросы для самоконтроля

1. Каким уравнением описывается движение центра масс?
2. Почему внутренние силы, действующие на систему, не влияют на движение ее центра масс?
3. В каком случае центр масс системы остается в покое?
4. Когда центр масс системы движется в направлении некоторой оси равномерно?
5. Почему человек не может сам себя поднять за волосы? А почему может присесть и какое при этом его давление на пол?
6. Какое действие на твердое тело оказывает приложенная к нему пара сил?
7. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
8. Как определяется количество движения системы?
9. Сформулируйте теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной и интегральной формах.

Вопросы для самоконтроля

10. При каких условиях количество движения системы не изменяется?
11. При каких условиях не меняется проекция количества движения на данную ось?
12. Можно ли за счет внутренних усилий изменить количество движения системы?
13. Почему происходит откат орудия при выстреле?
14. Перечислите основные этапы решения задач на применение теоремы о движении центра масс или теоремы об изменении импульса системы.
15. Почему решение задач следует начинать с выбора механической системы?
16. В каких системах координат справедливы теоремы о движении центра масс и об изменении импульса системы?

Тема следующей лекции

Теорема об изменении момента количества движения системы


Лекция окончена!!!