Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 5.
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Кафедра теоретической механики

План лекции

Введение

1 Момент количества движения точки и механической системы

2 Теорема об изменении количества движения (теорема моментов)

3 ДУ движения твердого тела

4 Законы сохранения момента количества движения

5 Движение точки под действием центральной силы

6 Физический маятник

7 Решение задач с использованием теоремы моментов

Заключение

На предыдущей лекции

Изучили первые две теоремы:

- **Теорему о движении центра масс**
- **Теорему об изменении импульса**

Дали рекомендации к решению задач на применение общих теорем динамики

Рассмотрели примеры решения задач

Цель лекции

Изучить теорему об изменении момента количества движения механической системы (теорему моментов)

НАПОМНИМ: МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ

1 – центр масс системы

$$\vec{r}_C = (\sum m_k \vec{r}_k) / M$$

2 – количество движения (импульс) системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{\mathrm{v}}_k$$

3 – момент количества движения (момент импульса) системы

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_k \vec{\mathrm{v}}_k)$$

4 – кинетическая энергия системы

$$T = \sum (\frac{1}{2} m_k \mathrm{v}_\mathrm{k}^2)$$

Напомним:

Движение механической системы мы будем изучать по поведению ее характеристик (мер движения) - центра масс, количества движения, момента количества движения, кинетической энергии

Поведение же этих характеристик будет определяться теоремами об их изменении со временем.

На этой лекции мы изучим третью теорему:

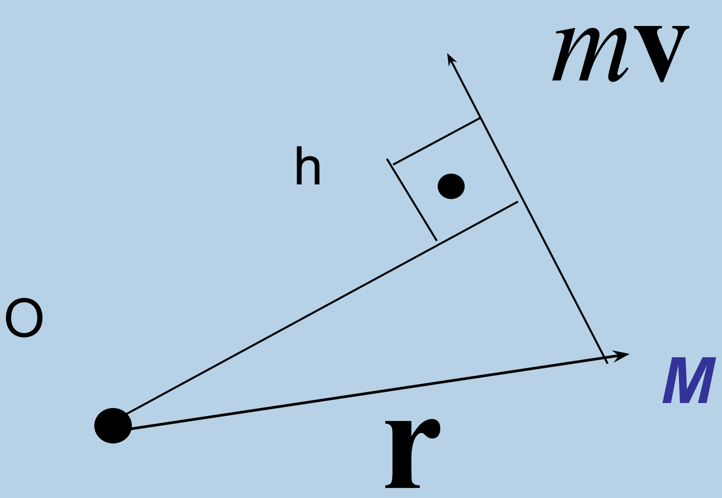
Теорему об изменении момента количества движения

Момент количества движения точки

На предыдущей лекции было показано, что ***центр масс и количество движения системы*** характеризуют ее ***поступательное движение***
Для характеристики ***вращательного движения*** системы введем ***момент количества движения***.

Момент количества движения точки

$$\vec{K}_0 = \vec{M}_O(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}$$



Момент импульса точки ***M***

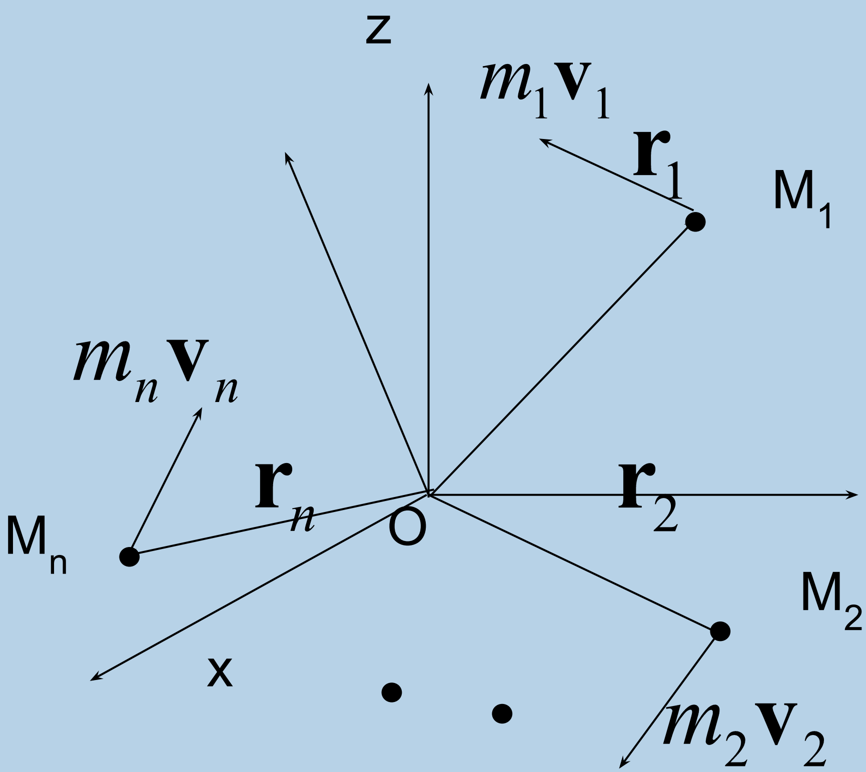
Направление – по правилу векторного произведения.

Модуль $K_0 = mVh$

O – центр

Момент количества движения системы

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O(m_k \vec{V}_k) = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k$$



$\mathbf{r}_k$ - радиус-вектор

$\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k$

- момент импульса точки

Моментом импульса** механической системы относительно центра **О** называется сумма моментов импульса всех ее точек относительно того же центра **О

Проекции момента импульса

$$\mathbf{K}_0 = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k \qquad (1)$$

$$K_x = \sum_k m_k (y_k \text{v}_{kz} - z_k \text{v}_{ky})$$

$$K_y = \sum_k m_k (z_k \text{v}_{kx} - x_k \text{v}_{kz}) \qquad (2)$$

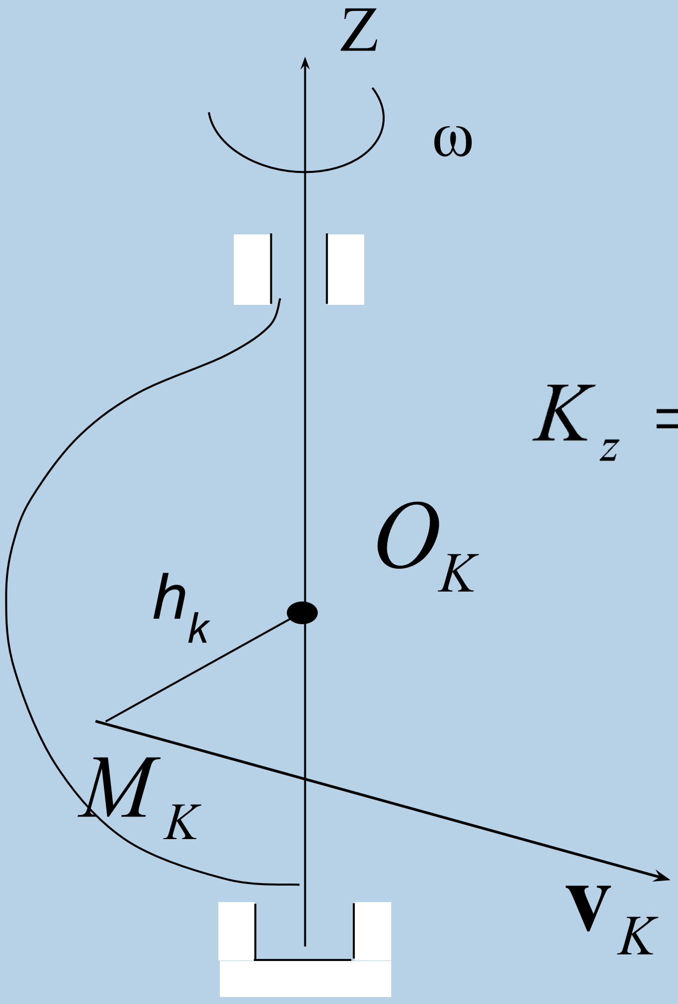
$$K_z = \sum_k m_k (x_k \text{v}_{\text{ky}} - y_k \text{v}_{kx})$$

x_k, y_k, z_k - координаты точек $M_k, k = 1, \ldots, N$

Проекции момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси

Скорость любой точки тела M_K

$$v_k = \omega h_k$$



Следовательно

$$K_z = \sum_k (m_k v_k) h_k = (\sum_k m_k h_k^2)\omega = J_z \omega$$

J_z - момент инерции тела относительно оси Z

h_k - расстояние до оси **Z**

Проекции момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси

$v_{kz} = 0,$ - проекции скорости точки тела

$v_{ky} = \omega x_k,$

$v_{kx} = -\omega y_k$

Следовательно

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = -(\sum_k m_k x_k z_k)\omega = -J_{xz}\omega$$

$$K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) = -(\sum_k m_k y_k z_k)\omega = -J_{yz}\omega$$

J_{xz}, J_{yz} - центробежные моменты инерции тела

Проекции момента импульса твердого тела, вращающегося вокруг оси

Для *вращающегося вокруг оси* **Z** *твердого тела его* **моменты импульса** *относительно осей* ***X,Y,Z***

$$\mathbf{K}_0 = (K_x, K_y, K_z)$$

$$K_x = -J_{xz}\omega$$

$$K_y = -J_{yz}\omega \qquad (3)$$

$$K_z = J_z\omega$$

Чтобы $\mathbf{K}_0$ был направлен вдоль *Z* необходимо и достаточно, чтобы его *центробежные моменты инерции* были равны нулю (например, **Z** - ось симметрии тела)

Аналогия между поступательным и вращательным движением

для поступательного движения мерой его движения является количество движения

$$\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$$

для ***вращательного движения*** мерой движения (мерой вращения) является его ***момент количества движения***

$$\mathbf{K}_0 = (K_x, K_y, K_z)$$

Если твердое тело движется поступательно, то его момент импульса относительно центра **O**

$$\mathbf{K}_0 = \sum_k \mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k = \left(\sum_k m_k \mathbf{r}_k\right) \times \mathbf{v} = M\mathbf{r}_c \times \mathbf{v} = \mathbf{r}_c \times (M\mathbf{v})$$

при определении момента импульса его можно считать точкой, расположенной в центре масс

Момент количеств движения системы относительно разных точек A и B

$$\mathbf{K}_B = \mathbf{K}_A + \mathbf{BA} \times (M\mathbf{v}_C)$$

аналогична формуле из статики

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \times \mathbf{R}^*$$

$\mathbf{R}^*$ - главный вектор

Теорема моментов

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^i, k = 1,\ldots, N \qquad (4)$$

умножим обе части уравнений векторно на $\mathbf{r}_k$

$$\mathbf{r}_k \times (m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i$$

левая часть

$$\mathbf{r}_k \times (m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) - \mathbf{v}_k \times m_k \mathbf{v}_k$$

Теорема моментов

векторы $\mathbf{v}_k$ $m_k \mathbf{v}_k$ параллельны

$$\mathbf{v}_k \times m_k \mathbf{v}_k = 0$$

мы получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i \qquad (5)$$

суммируем

$$\sum_k \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e + \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i$$

Теорема моментов

По свойству внутренних сил $\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^i = 0$

Учитывая, что сумма производных равна производной от суммы, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_k (\mathbf{r}_k \times m_k \mathbf{v}_k) = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^e$$

или

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) \qquad (6)$$

теорема моментов

Теорема моментов

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) \qquad (6)$$

Производная по времени от момента импульса механической системы относительно некоторого неподвижного центра ***О*** *равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра* ***О***

Теорема моментов, также как и ***теоремы о движении центра масс и об изменении количества движения***, позволяет исключить из рассмотрения все наперед ***неизвестные внутренние силы***.

Теорема моментов в проекциях на оси

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_k M_x(\mathbf{F}_k^e)$$

$$\frac{dK_y}{dt} = \sum_k M_y(\mathbf{F}_k^e) \qquad (7)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e)$$

Д.У. вращательного движения твердого тела

$$K_z = J_z\omega \qquad \frac{dK_z}{dt} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) \qquad (7)$$

$$J_z\varepsilon = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e)$$

или $$J_z\ddot{\varphi} = \sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) \qquad (8)$$

ДУ вращательного движения твердого тела,

Начальные условия: $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$

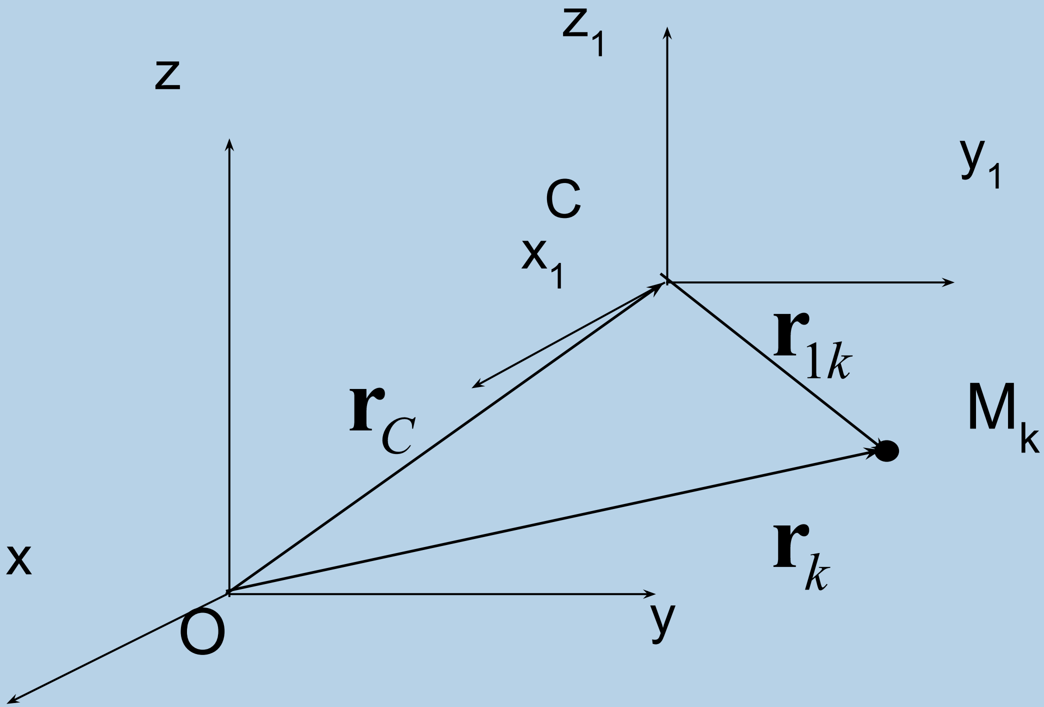
Д.У. плоского твердого тела

Вспомним кинематику: Плоское (или произвольное) движения твердого тела мы можем представить как сумму поступательного движения вместе с центром масс C и вращательного (или сферического) движения вокруг центра масс C

Поступательная часть движения определяется теоремой о движении центра масс

$$M\mathbf{a}_c = \sum_k \mathbf{F}_k^e \qquad (9)$$

Для определения вращательной части движения найдем выражение для теоремы моментов во вспомогательной системе координат $Cx_1y_1z_1$



Радиус вектор

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_{1k}$$

$$\mathbf{F}_{ke}^{in} = -m_k \mathbf{a}_{ke},$$

$$\mathbf{F}_{kc}^{in} = -m_k \mathbf{a}_{kc}$$

второй закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета

$$m_k \mathbf{a}_{kr} = \mathbf{F}_k^i + \mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_{ke}^{in} + \mathbf{F}_{kc}^{in} \qquad (10)$$

$Oxyz$ - инерциальная системе координат

$Cx_1y_1z_1$ - подвижная система координат, движение поступательное

Имеем: $\omega_e = 0$ $\quad \mathbf{F}^{in}_{kc} = 0$

$$\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}^i_k) = 0$$ свойство внутренних сил

Повторяя те же выкладки, что были при выводе теоремы моментов, получим

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}^e_k) + \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}^{in}_{ke}) \qquad (11)$$

$\mathbf{K}_c$ вычисляется в системе координат $Cx_1y_1z_1$

$\mathbf{a}_{kc} = \mathbf{a}_c$ - для всех точек; $\mathbf{F}^{in}_{ke} = -m_k\mathbf{a}^e_k = -m_k\mathbf{a}_c \Rightarrow$

$$\sum_k \mathbf{M}_C(\mathbf{F}^{in}_{ke}) = (\sum_k m_k\mathbf{r}_{1k}) \times \mathbf{a}_C = M\mathbf{r}_{1C} \times \mathbf{a}_C = 0,$$

$$т.к.\ \mathbf{r}_{1C} = 0$$

В результате мы получили

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_k^e) \qquad (12)$$

В системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра

Д.У. плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_c = \sum_k F_{kx}^e$$

$$M\ddot{y}_c = \sum_k F_{ky}^e \qquad (13)$$

$$J_c\ddot{\varphi} = \sum_k M_c(\mathbf{F}_k^e)$$

при начальных условиях

$$x_c(0) = x_{c0},\, y_c(0) = y_{c0},\, \varphi(0) = \varphi_0,$$

$$\dot{x}(0) = \mathrm{v}_{\mathrm{Cxo}},\, \dot{y}(0) = \mathrm{v}_{\mathrm{Cyo}},\, \dot{\varphi}(0) = \omega_o$$

Законы сохранения момента импульса

1. Пусть сумма моментов внешних сил равна нулю

$$\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e) = 0$$

Тогда из уравнения

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^e)$$

следует $$\mathbf{K}_0 = \mathbf{const} \qquad (14)$$

*Если сумма моментов внешних сил относительно **О**, действующих на механическую систему равна нулю, то момент импульса сохраняется во все время движения*

Законы сохранения момента импульса

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно некоторой оси равна нулю $$\sum_k M_z(\mathbf{F}_k^e) = 0$$

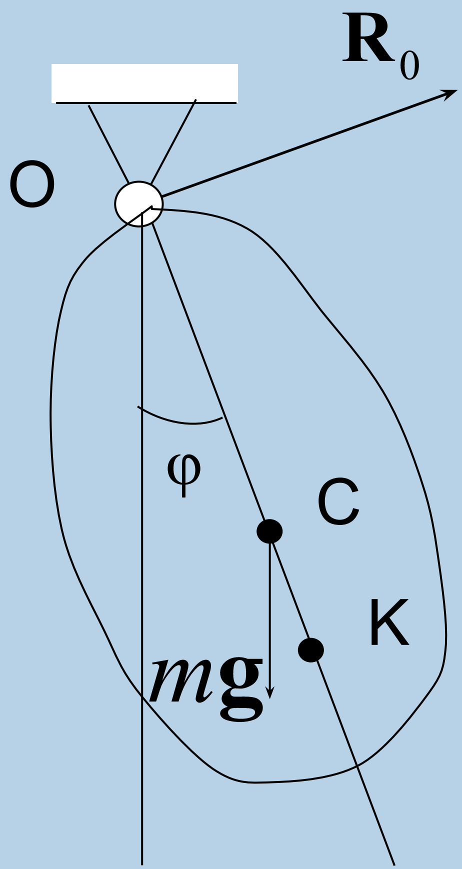
то момент количества движения относительно этой оси сохраняется $$K_z = const \qquad (15)$$

Для вращающегося тела формула (15) дает:

$$J_z\omega = const$$

Примеры: вращение фигуриста, сальто гимнаста, падение человека – руки расставляет, падающая кошка приземляется на ноги!

Физический маятник



C - центр масс; $OC = a$

J_0 - момент инерции относительно оси O

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_k^e) \Rightarrow$$

$$J_0\ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0; \quad k^2 = mga / J_0$$

Получили нелинейное ДУ, ограничимся случаем малых колебаний

Случай малых колебаний

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\cos\varphi \approx 1$$

$$\varphi = A\sin(kt + \beta)$$

НУ: $t = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = \omega(0) = \omega_0$

$$A = \sqrt{\varphi_0^2 + (v_0 / k)^2} \qquad \beta = arctg(\varphi_0 k / \omega_0)$$

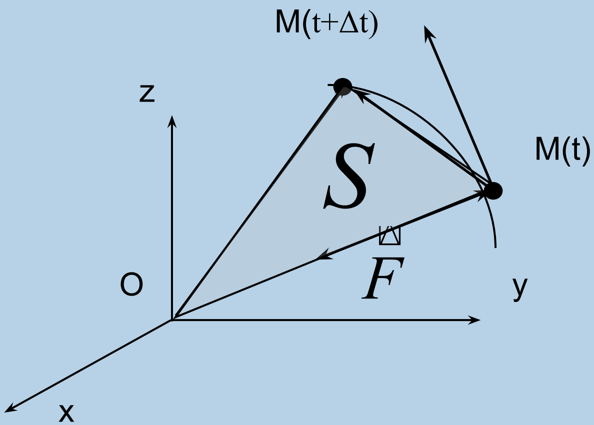
Период колебаний: $T_\Phi = 2\pi / k = 2\pi\sqrt{J_0 / mga}$ (17)

(не зависит от начальных условий)

Из (17) следует: $J_0 = mgaT_\Phi^2 / 4\pi^2$ (18)

Формулу (18) используют для опытного определения J_0

Движение Земли вокруг Солнца



M – Земля, O - Солнце

$\vec{F}$ – сила притяжения Земли к Солнцу

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{V} = \mathbf{const}$$

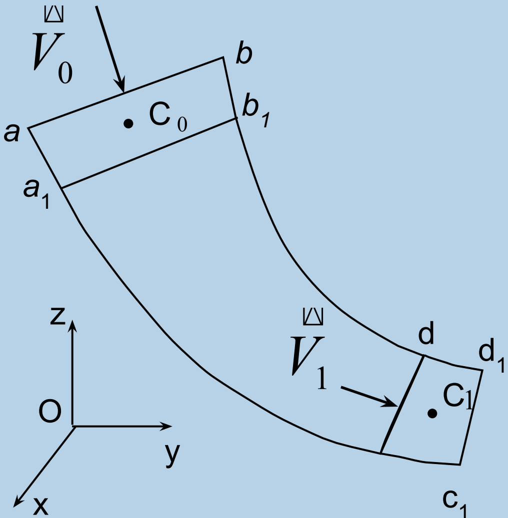
$$\left|\vec{K}_O\right| = \left|\vec{r} \times m\vec{V}\right| = m\lim(\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right| / \Delta t) =$$

$$= m\lim(2\Delta S / \Delta t) = 2m\dot{S} = const \Rightarrow \dot{S} = const$$

Радиус-вектор описывает равные площади в любые одинаковые промежутки времени (закон площадей)

Из постоянства направления $\vec{K}_O$ ***следует, что траектория движения является плоской кривой***

Применение теоремы к движению жидкости



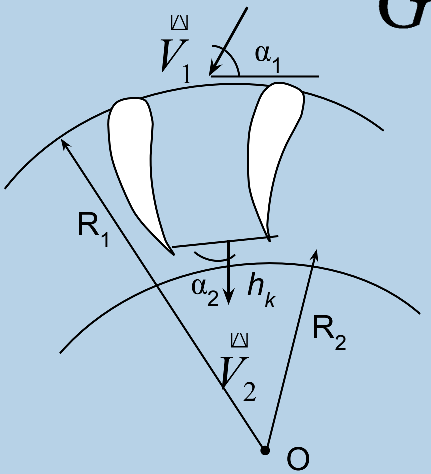
$$\vec{K}_{20} - \vec{K}_{10} = \vec{K}_{cdc_1d_1} - \vec{K}_{aba_1b_1} = \vec{r}_{c_1} \times m_{cdc_1d_1} - \vec{r}_{c_0} \times m_{aba_1b_1}$$

$$m_{aba_1b_1} = m_{cdc_1d_1} = G_{cek} \cdot \Delta t \Rightarrow \vec{K}_{20} - \vec{K}_{10} = G_{cek}(\vec{r}_{c_1} \times \vec{V}_1 - \vec{r}_{c_0} \times \vec{V}_0)\Delta t$$

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \qquad G_{cek}(\vec{r}_{c_1} \times \vec{V}_1 - \vec{r}_{c_0} \times \vec{V}_0) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k^e) \qquad (19)$$

Разность секундных моментов импульса относитель-но центра О, протекающих через два поперечных сечения трубы, равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на объем жидкости, ограниченной этими сечениями, относительно того же центра О

$$G_{cek}(\vec{r}_{c_1}\times\vec{V}_1-\vec{r}_{c_0}\times\vec{V}_0)=\sum\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)\qquad(19)$$



Определим с помощью (19) момент M_{oz} на ось турбины сил давления воды.

Внешние силы давления жидкости во входном и выходном сечении направлены вдоль радиусов и момента относительно оси Oz не создают
Для симметричной турбины сила тяжести проходит через ось Oz и также момента не создает.
Следовательно $\sum\vec{M}_O(\vec{F}_k^e)=M_{oz}$

Из (19) получаем: $M_{oz}=G_{cek}(R_1V_1\cos\alpha_1-R_2V_2\cos\alpha_2)$

- турбинное уравнение Эйлера

Напомним рекомендации к решению задач:

1 ***Выбрать механическую систему*** (удачно!)

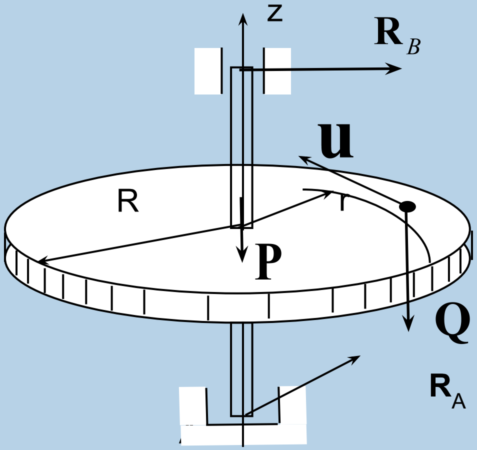
2 ***Изобразить все нужные силы*** (активные и реакции связей)

3 ***Записать одну из общих теорем динамики (или несколько)***

4 ***Проинтегрировать полученную систему уравнений.*** Постоянные интегрирования определяются при этом из дополнительных (*начальных*) *условий задачи*

5 ***Определить искомые величины***

Задача 1



Дано: платформа однородная веса **P**, радиуса **R**, трения в опорах нет, ось **z** – вертикальная, при **t=0** человек веса **Q** покоился. $\omega(0) = \omega_0$

Определить ω **, если человек пойдет по платформе на расстоянии r с относительной скоростью u.**

Решение. 1. М.С. – платформа + человек

2. Внешние силы: P, Q, R_A, R_B

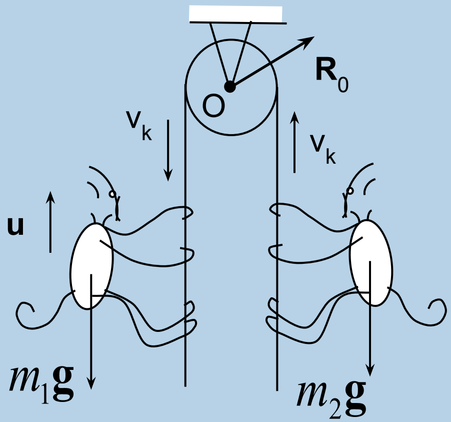
3.
$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow K_z = const$$

4,5.
$$J_z\omega_0 + (Q/g)r^2\omega_0 = J_z\omega + (Q/g)r(\omega r + u); J_z = PR^2/2g =$$

$$\omega = \frac{(PR^2 + 2Qr^2)\omega_0 - 2Qru}{PR^2 + 2Qr^2}$$

Проанализировать ответ!

Задача 2



Дано: две одинаковые обезьяны сидят на концах каната. Первая – ползет все время по канату вверх, вторая – просто сидит. Какая из обезьян окажется наверху быстрее? Считать канат и блок невесомыми, трением в блоке пренебречь.

Решение. 1. М.С. – обе обезьяны + канат + блок

2. Внешние силы: m_1g, m_2g, R_0

3. $$\frac{dK_o}{dt} = \sum M_o(\vec{F}_k^e) = m_1gr - m_2gr = 0 \Rightarrow K_0 = const = 0$$

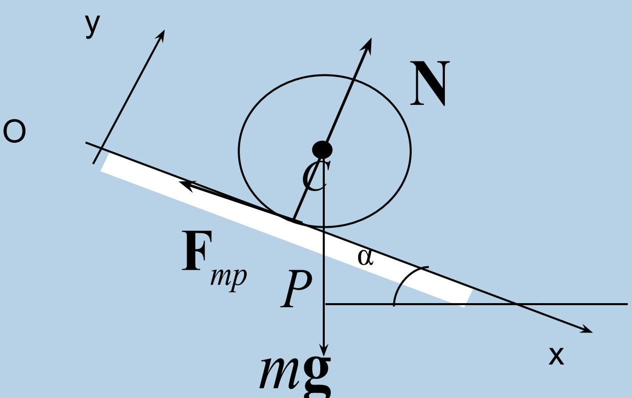
4,5. $$K_o = rm_1V_1 - rm_2V_2 = 0;\; V_1 = u - V_k;\; V_2 = V_k$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow V_k = u/2; \quad V_1 = V_2 = u/2$$

Обезьяны поднимутся одновременно!

Если бы вторая обезьяна тоже ползла, то они поднялись бы вдвое быстрее! $V_k = 0; \quad V_1 = V_2 = u$

Задача 3



Дано: однородный цилиндр массы **m**, катится без проскальзывания по плоскости с углом наклона α Трением качения пренебречь. Найти ускорение a_C цилиндра.

Решение. 1. М.С. – цилиндр

2. Внешние силы: mg, $F_{тр}$, N

3. ДУ плоского движения: $m\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx} = mg\sin\alpha - F_{тр}$

$$m\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky} = N - mg\cos\alpha; \quad J_C\ddot{\varphi} = \sum M_C(\vec{F}^e_k) = F_{тр}R$$

4,5. $\ddot{y}_C = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha;$

$$P - МЦС \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = -V_C / R; \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = -a_C / R = -\ddot{x}_C / R$$

Имеем: $ma_C = mg\sin\alpha - F_{тр}; N = mg\cos\alpha; J_C a_C = F_{тр}R^2$

$$J_C = mR^2 / 2 \Rightarrow F_{тр} = ma_C / 2 \Rightarrow a_C = 2g\sin\alpha / 3$$

Замечание $F_{тр} \le fN \Leftrightarrow tg\alpha \le f$ Иначе будет проскальзывание!

Заключение

1. Изучена теорема моментов и ее частные случаи - законы сохранения момента импульса
2. Выведены ДУ поступательного, вращательного и плоского движения твердого тела
3. Приведены примеры применения теоремы моментов к движению Земли вокруг Солнца, к движению жидкостей, к физическому маятнику
4. Рассмотрены решения задач с использованием теоремы моментов

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется и для чего вводится момент количества движения системы?
2. Чему равен момент количества движения твердого тела относительно оси его вращения?
3. Как связаны моменты количеств движения относительно разных точек?
4. В чем состоит теорема моментов для системы?
5. Справедлива ли она с системе отсчета, движущейся поступательно с центром масс системы?
6. Когда сохраняется момент количества движения системы относительно точки? А относительно оси?
7. Зачем фигурист прижимает руки к туловищу, если он хочет вращаться быстрее?
8. Можно ли изменить момент количества движения за счет внутренних сил? А момент инерции относительно оси?
9. В чем аналогия между поступательным и вращательным движением твердого тела?

Вопросы для самоконтроля

10. Как происходит движение материальной точки под действием центральной силы?
11. Что называют физическим маятником? Каким уравнением описываются его малые колебания?
12. Какой вид имеют ДУ вращательного, поступательного и плоского движения твердого тела?
13. Можно ли составить ДУ произвольного движения твердого тела?
14. Каковы основные этапы решения задач на применение теоремы моментов? В каких случаях удобно использовать именно эту теорему?

Тема следующей лекции

Теорема об изменении кинетической энергии системы


Лекция окончена!!!