Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 3. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Кафедра теоретической механики

План лекции

Введение

1 Механическая система

2 ДУ движения механической системы

3 Меры движения

4 Внешние и внутренние силы

5 Масса системы, центр масс, момент инерции относительно оси

6 Моменты инерции относительно параллельных осей

7 Момент инерции относительно произвольной оси

Заключение

На предыдущих лекциях

Изучили динамику материальной точки.

Основной закон движения:

$$m\vec{a} = \vec{F}; \quad \vec{F} = \sum \vec{F}_k - \textit{равнодействующая}$$

$$\textit{Система} \quad \textit{отсчета} - \textit{инерциальная}$$

В качестве примера подробно познакомились с колебательным движением точки

Цель лекции

Определить понятия механической системы и основных характеристик, необходимых для изучения ее движения

Введение

Напомним: **В качестве тел мы изучаем 1) точки, 2) абсолютно твердые тела и 3) конструкции, состоящие из 1) и 2)**

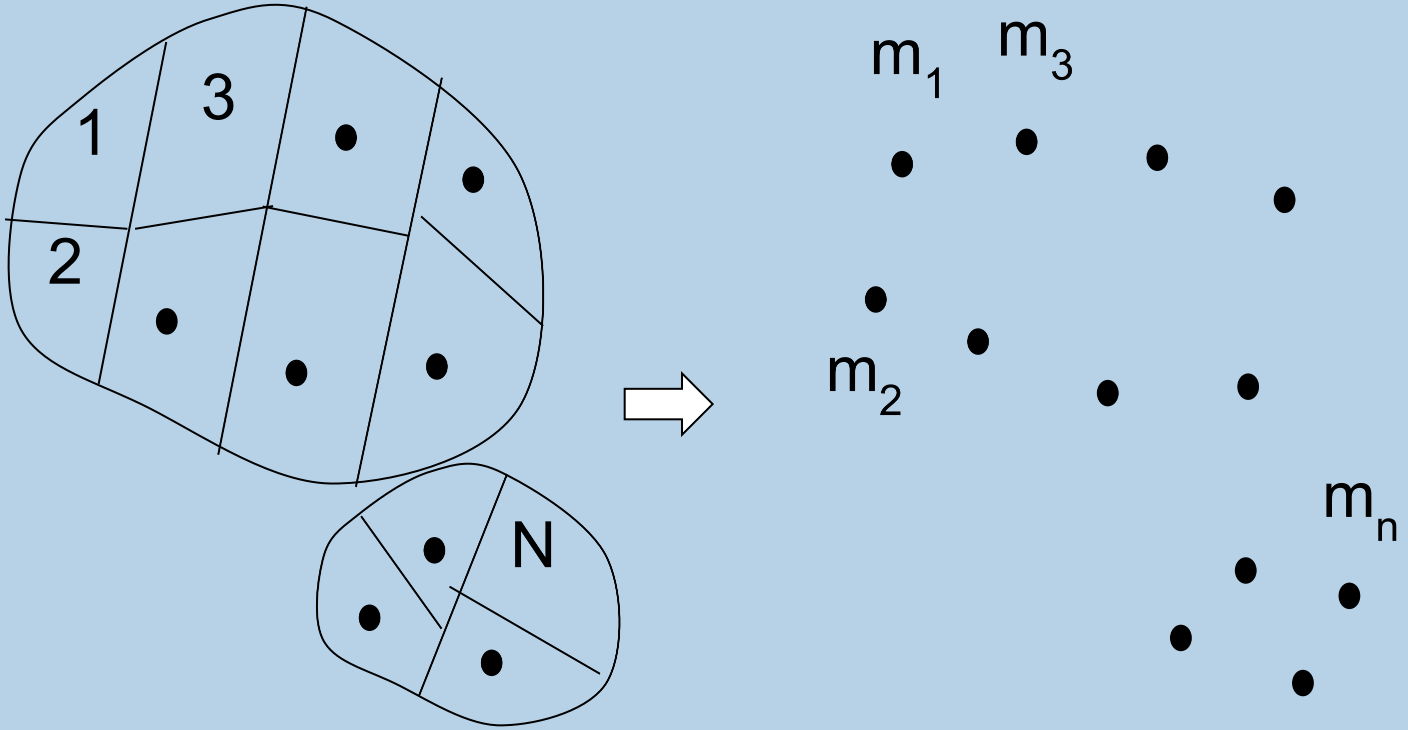
Динамику точки мы изучили
Переходим к изучению механических систем:

Механическая система:

- **система материальных точек**
- **твердое тело**
- **система твердых тел**

Введение

Движение твердых тел и конструкций приближенно сведем к движению системы точек:



m_k – *масса к –ого элемента конструкции, моделируемого материальной точкой*

Алгоритм редукции системы твердых тел к механической системе

1 **Имеем систему из твердых тел**

2 **Разобьем её на n частей *(n – большое число)***

3 **Заменим каждую *k-ю* часть системы на материальную точку с массой равной массе этого элемента**

4 **Получим систему из *N* материальных точек с массами**

$$m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$$

ДУ движения механической системы

Рассмотрим движение механической системы в инерциальной системе координат.
Запишем *второй закон Ньютона* для ***k-й*** точки

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{F}_k \qquad (1)$$

$\mathbf{F}_k$ - равнодействующая всех сил (активных и реакций связей)

$\mathbf{r}_\mathbf{k}$ - радиус-вектор

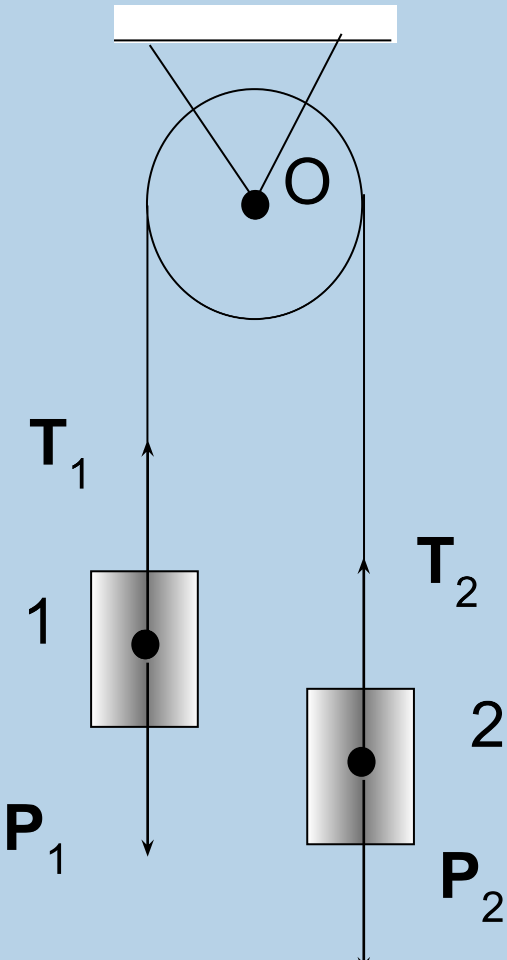
$$m_k \ddot{x}_k = F_{kx}$$

$$m_k \ddot{y}_k = F_{ky} \qquad (2)$$

$$m_k \ddot{z}_k = F_{kz}$$

$$k = 1, \ldots, n$$

Пример 1 Два тела с массами связаны между собой тросом, перекинутым через блок. Пренебрегая силами трения, массой троса и блока, определить ускорение грузов и натяжение троса.



$$P_2 < P_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = P_1 - T_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = P_2 - T_2$$

С учетом

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 \qquad T_2 = T_1 = T$$

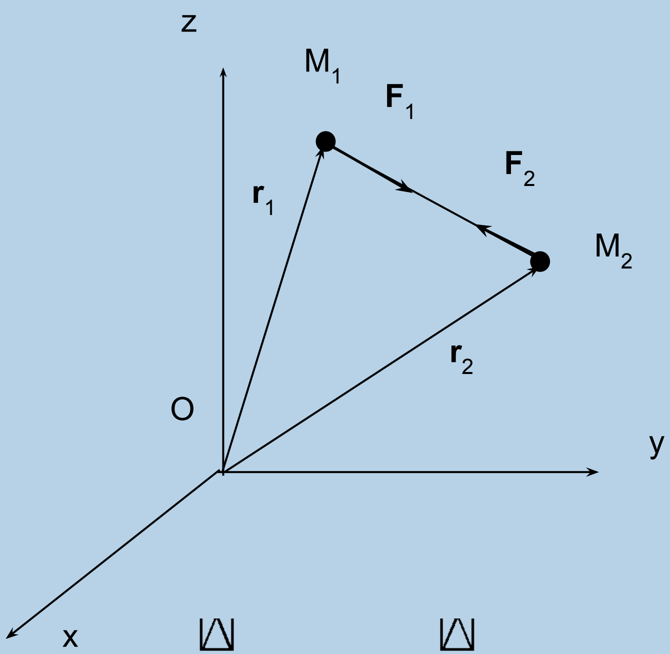
Получим

$$\ddot{x}_1 = \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} g \qquad T = 2\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}$$

$$P_2 < T < P_1$$

Пример 2 (задача двух тел)

Две точки M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 движутся под действием сил ньютоновского притяжения. Составить ДУ их движения.



$$Oxyz - \text{инерциальная},$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$F_1 = F_2 = fm_1m_2 / r^2$$

$$f - \text{гравитационная постоянная}$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = (fm_1m_2 / r^2)(\vec{r} / r) \Rightarrow$$

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = f\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}; \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -f\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$$

ДУ движения механической системы

Основные трудности при решении ДУ:

1. ***Как правило, мы не знаем полностью всех сил*** (силы реакции связей и силы взаимодействия элементов конструкции между собой, которые чаще всего заранее неизвестны)
2. ***Большое число уравнений (10, 100, 100 000 000 …)***

Расчет требует применения мощных компьютеров, разработки численных методов решения ДУ и изучения свойств материалов самой конструкции

Другой путь: Вводят характеристики движения (*меры движения)* и по их поведению судят о движении системы в целом.

Примеры: *работа военкомата, конкурс красавиц.*

МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ механической системы:

1 – центр масс системы

$$\vec{r}_C = (\sum m_k \vec{r}_k) / M$$

2 – количество движения (импульс) системы

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{\mathrm{v}}_k$$

3 – момент количества движения (момент импульса) системы

$$\vec{K}_O = \sum \vec{M}_O (m_k \vec{\mathrm{v}}_k)$$

4 – кинетическая энергия системы

$$T = \sum (\frac{1}{2} m_k \mathrm{v}_\mathrm{k}^2)$$

МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ механической системы:

Соответственно, будут получены и четыре теоремы о движении этих характеристик:

1) Теорема о движении центра масс
2) Теорема об изменении количества движения
3) Теорема об изменении момента количества движения
4) Теорема об изменении кинетической энергии

Внешние и внутренние силы

В *статике* мы рассматривали *равновесие систем тел* и уже разделяли *силы* на *внешние* и *внутренние*

e

Внешними по отношению к данной ***механической системе*** называются ***силы***, действующие на точки этой системы со стороны тел не входящих в нее.

i

Внутренними называются ***силы*** взаимодействия между точками данной ***механической системы***.

Пример: Солнечная система:

e ***Внешние силы*** - силы притяжения звезд

i ***Внутренние силы*** - силы взаимодействия между отдельными ее планетами

Два свойства внутренних сил

По ***3-му закону Ньютона*** (о равенстве действия и противодействия) *каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила*, равная ей по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следуют ***два свойства внутренних сил***

1. Главный вектор внутренних сил системы равен нулю

$$\sum_k \mathbf{F}_k^i = 0 \qquad (3)$$

2. Главный момент внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю

$$\sum_k \mathbf{M}_0(\mathbf{F}_k^i) = 0 \qquad (4)$$

Масса системы, центр масс

Масса материальной точки полностью характеризует ***меру инерции*** точки. Согласно *2-му закону Ньютона*, движение точки при заданной массе полностью определяется заданными силами, действующими на точку и ее начальными условиями.

В случае ***механической системы*** состоящей из ***N*** точек ***масса системы M*** уже не определяют полностью ***меру инерции системы***.

Например, вращение фигуриста будет происходить с разной угловой скоростью, в зависимости от того, прижаты или расставлены у него руки.

То есть движение механической системы зависит еще и от распределения масс, определяемое координатами ее отдельных точек. Поэтому наряду с ***массой системы*** еще вводят понятия *центра масс* и *момента инерции относительно оси*.

Центр масс

Центром масс механической системы называется *геометрическая точка с координатами*

$$x_c = (\sum_k m_k x_k) / M$$

$$y_c = (\sum_k m_k y_k) / M \qquad (5)$$

$$z_c = (\sum_k m_k z_k) / M$$

$M = \sum m_k$ - масса системы

m_k - масса *k-й* точки системы

x_k, y_k, z_k - координаты *k-й* точки системы

Центр масс и центр тяжести

Центр масс

В однородном поле силы тяжести, для которого, вес любой точки пропорционален массе

$$\mathbf{g = const}$$

центр масс совпадает с центром тяжести.

Вместе с тем, в отличие от центра тяжести, понятие центра масс сохраняет смысл и для систем, находящихся в любом силовом поле.

Момент инерции относительно оси

***Моментом инерции** тела (системы) относительно данной оси **OZ** называется величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний до этой оси*

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2 \qquad (6)$$

J_z ***- осевой момент инерции***

h_k ***- расстояние от точки до оси***

***Осевой момент инерции** для вращающегося тела играет такую же роль, что **масса** при его поступательном движении*

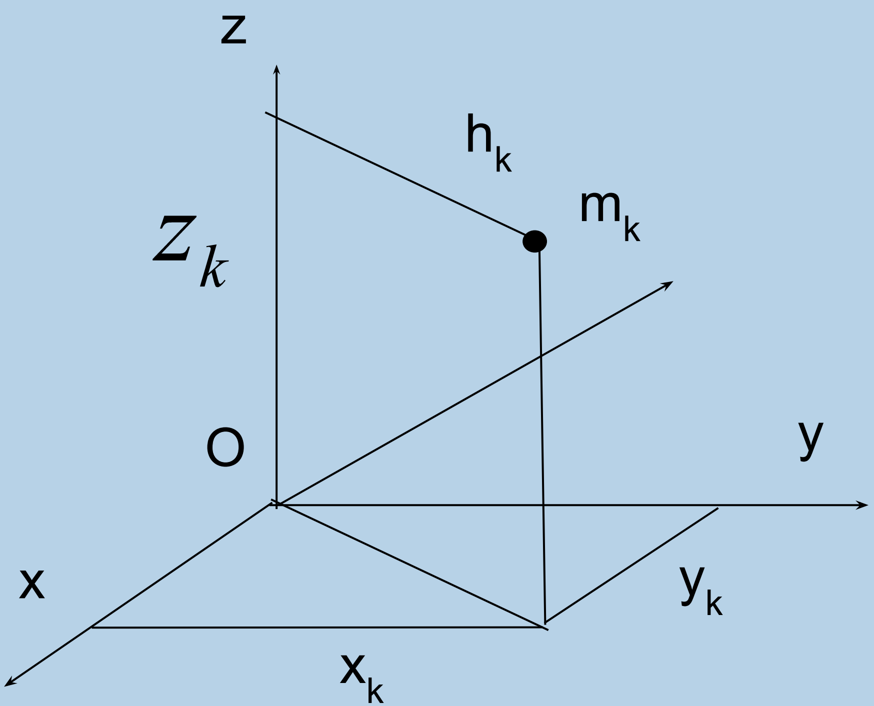
Моменты инерции относительно осей x,y,z

Выразим расстояния точек до осей через их координаты

$$h_k \quad \square \quad x_k, y_k, z_k$$

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2 \qquad h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$$

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$



В результате получим

$$J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) \qquad (7)$$

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Радиус инерции тела

$$J_z = M\rho_z \qquad (8)$$

радиус инерции ρ_z геометрически равен расстоянию от оси той точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела (системы), чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела (системы)

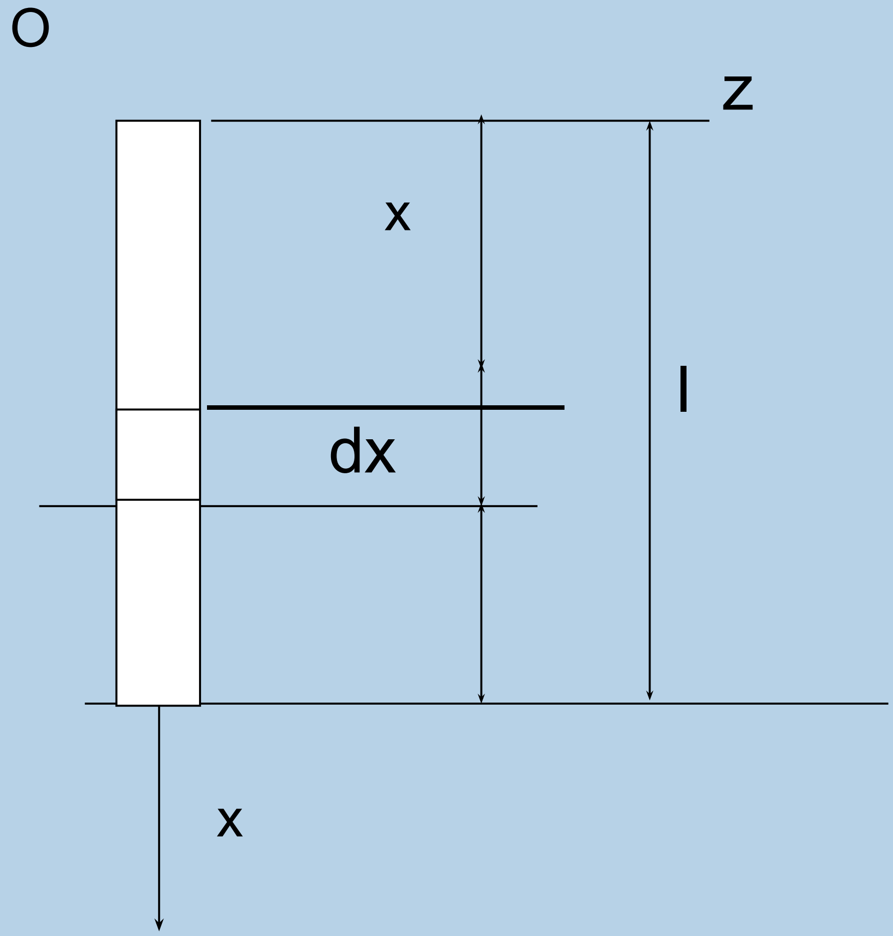
Момент инерции сплошного тела

Разобъем тело на элементарные части, в пределе сумма обратится в интеграл

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2 \qquad dm = \rho dV$$

$$J_z = \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(V)} \rho h^2 dV \qquad (9)$$

Пример 1 **Тонкий однородный стержень**



$$M \qquad l$$

$$h = x$$

$$dm = \rho dx$$

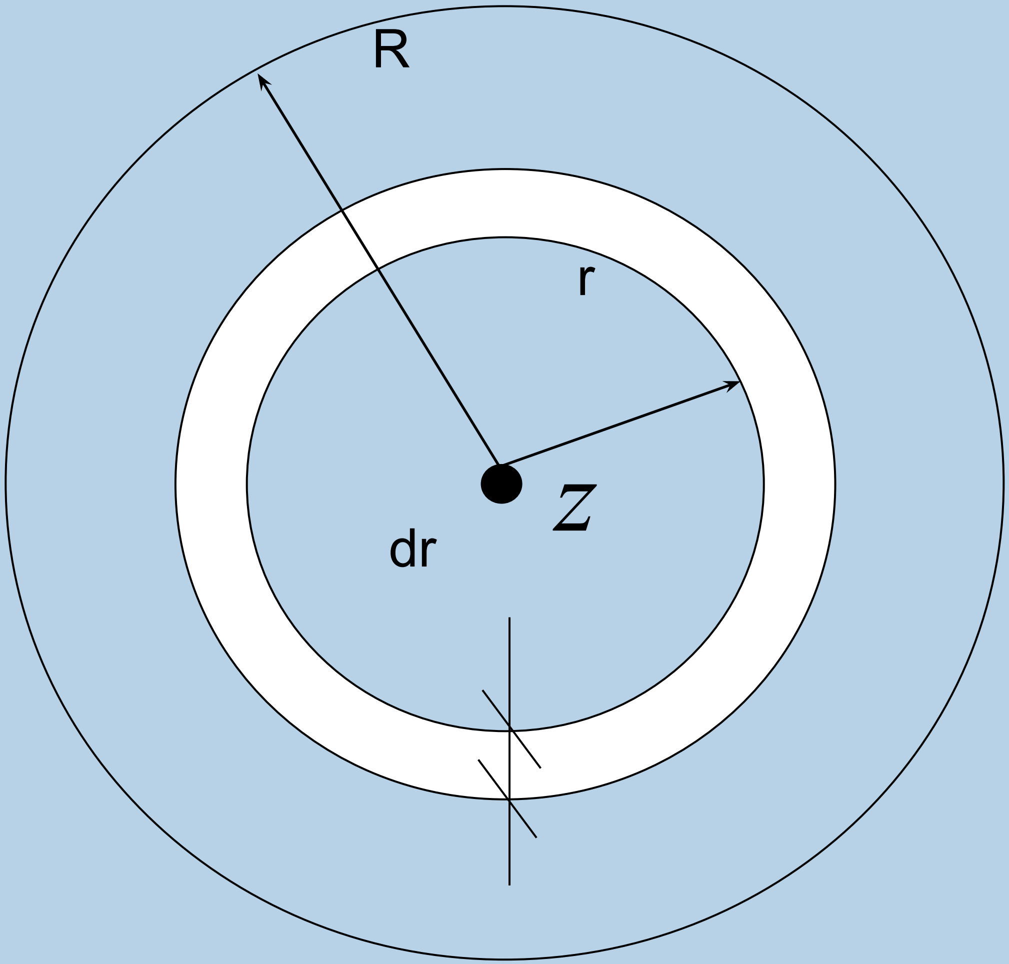
$$\rho_1 = M / l$$

$$J_z = Ml^2 / 3 = M\rho_z^2$$

$$\rho_z = l / \sqrt{3} \approx 0.58l$$

$$J_z = \int_0^M x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 l^3 / 3 = Ml^2 / 3$$

Пример 2 **Тонкий однородный диск**



$$M \qquad R$$

$$2\pi r dr$$

$$dm = \rho 2\pi r dr$$

$$\rho = M / \pi R^2$$

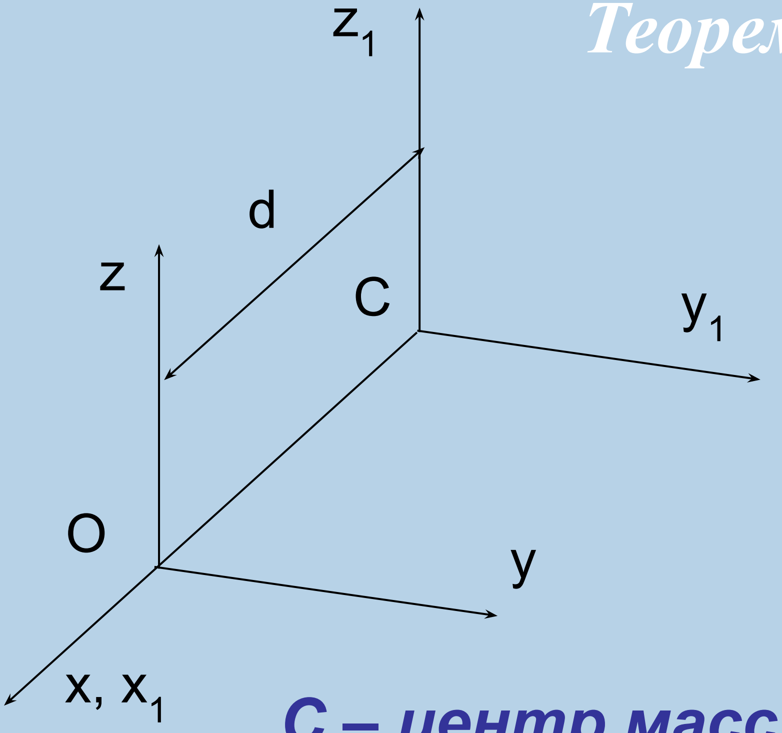
$$J_z = MR^2 / 2 = M\rho_z^2$$

$$\rho_z \approx 0.705R$$

$$J_z = \int_{(M)} h^2 dm =$$

$$= \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = \pi\rho R^4 / 2 = MR^2 / 2$$

Теорема Гюйгенса



С – центр масс

$$J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

$$J_{cz_1} = \sum_k m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2)$$

$$x_k = x_{1k} - d, \; y_k = y_{1k}$$

$$x_k^2 = x_{1k}^2 - 2x_{1k}d + d^2$$

$$J_z = \sum_k m_k (x_{1k}^2 + y_{1k}^2) + (\sum_k m_k) d^2 - 2(\sum_k m_k x_{1k}) d$$

$$\sum_k m_k x_{1k} = M x_{1c} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_z = J_{cz_1} + Md^2$$

Теорема Гюйгенса

$$J_z = J_{cz_1} + Md^2 \qquad (10)$$

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением его массы на квадрат расстояния между осями

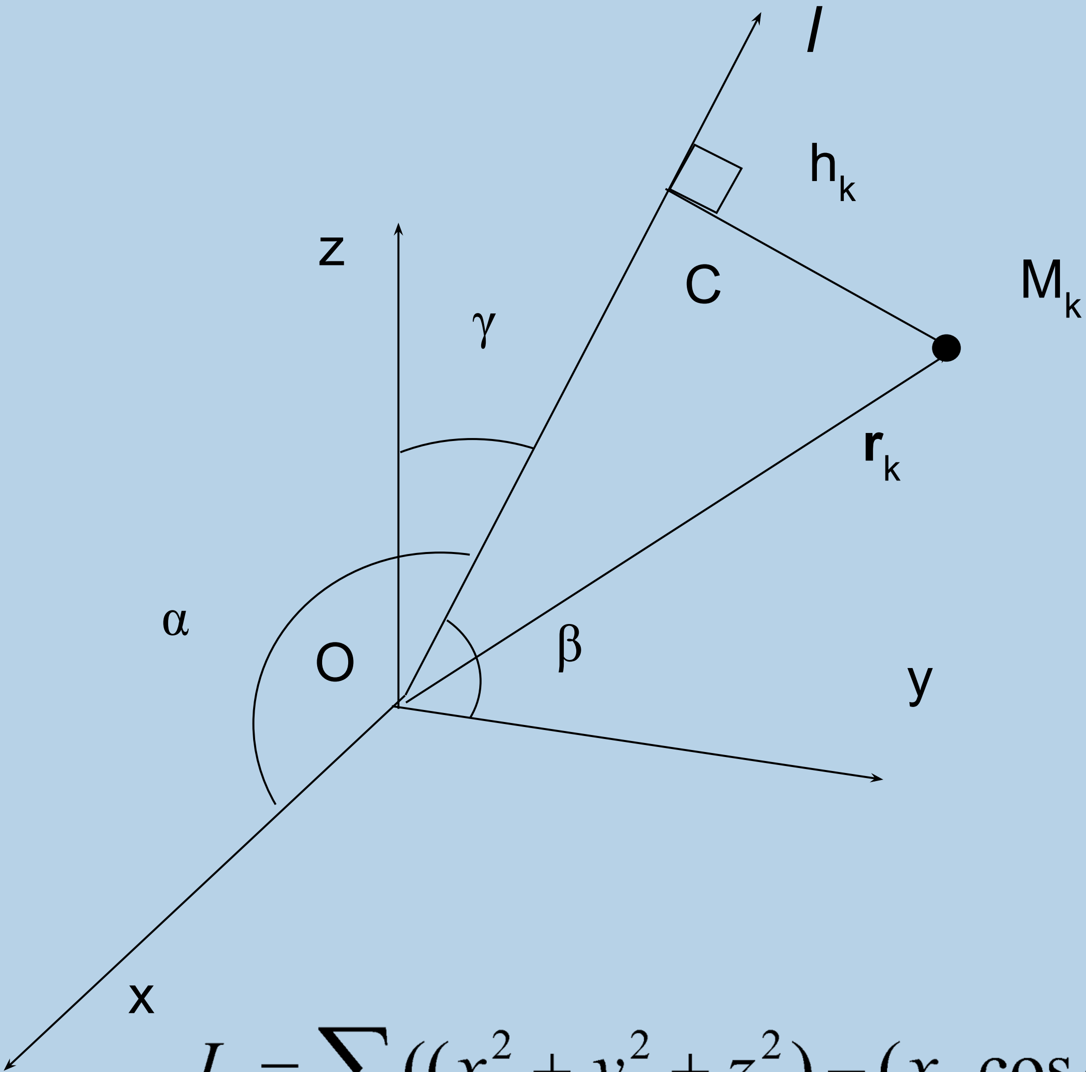
J_{cz_1} ***момент инерции относительно центра масс тела***

J_z ***момент инерции тела относительно произвольной***

d ***расстояние между осями***

$$J_{z_2} = J_{z_1} + M(d_2^2 - d_1^2)$$

Момент инерции относительно произвольной оси



$$J_l = \sum_k m_k h_k^2$$

$$h_k^2 = r_k^2 - OC_k^2$$

$$r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$$

$$x_k i_l = x_k \cos\alpha,$$

$$y_k j_l = y_k \cos\beta,$$

$$z_k k_l = z_k \cos\gamma$$

$$J_l = \sum_k ((x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k \cos\alpha + y_k \cos\beta + z_k \cos\gamma)^2) m_k$$

***l* - произвольная ось с углами** α, β, γ

Момент инерции относительно произвольной оси

$$
\begin{aligned}
J_l = {} & \cos^2\alpha \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) \\
& + \cos^2\beta \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) \\
& + \cos^2\gamma \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) - \\
& - 2\cos\beta\cos\gamma \sum_k m_k y_k z_k \\
& - 2\cos\alpha\cos\gamma \sum_k m_k x_k z_k \\
& - 2\cos\alpha\cos\beta \sum_k m_k x_k y_k
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Осевые и центробежные моменты инерции

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2); \quad J_z = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Центробежные моменты инерции:

$$J_{yz} = \sum_k m_k y_k z_k; \quad J_{xz} = \sum_k m_k x_k z_k; \quad J_{xy} = \sum_k m_k x_k y_k$$

Момент инерции относительно произвольной оси l:

$$J_l = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - \tag{12}$$

$$-2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{xz} \cos\alpha \cos\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta$$

Осевые и центробежные моменты инерции

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть как положительные, так и отрицательные и, в частности, при определенном выборе осей обращаться в нули

Осевой момент инерции характеризует меру инертности тела при его вращении вокруг соответствующей оси

Центробежные моменты инерции характеризуют несимметричность распределения масс тела относительно координатных осей или плоскостей

Заключение

1. Дано определение механической системы
2. Приведены ДУ ее движения
3. Определены меры движения: центр масс, количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия
4. Определены внешние и внутренние силы, действующим на систему
5. Показано, что сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю
6. Дано определение массы, центра масс и момента инерции относительно оси
7. Доказана Теорема Гюйгенса о связи между моментами инерции относительно параллельных осей

Вопросы для самоконтроля

1. Каким образом задача о движении произвольной механической системы (конструкции) приближенно сводится к задаче о движении конечного числа материальных точек?
2. Какие основные сложности решения системы ДУ движения материальных точек, описывающих движение материальной системы? Какой другой путь приближенного описания движения механических систем?
3. Какие силы называются внутренними, а какие внешними для выбранной механической системы?
4. Какими свойствами обладают внутренние силы, действующие на элементы механической системы?
5. Что называют центром масс системы? Как определяются его координаты?
6. Какая связь между центром масс и центром тяжести системы?
7. Как определяется момент инерции относительно оси? Что такое радиус инерции?

Вопросы для самоконтроля

8. Относительно какой из параллельных осей момент инерции будет наименьшим?
9. Какова зависимость между моментами инерции относительно двух параллельных осей?
10. Как определяются центробежные моменты инерции и что они характеризуют?
11. Как определить момент инерции относительно произвольной оси, проходящей через начало системы координат $Oxyz$

Тема следующей лекции

Теорема о движении центра масс и об изменении количества движения системы


Лекция окончена!!!