



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

Часть I

РАСЧЁТ ТРЁХШАРНИРНЫХ СИСТЕМ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ

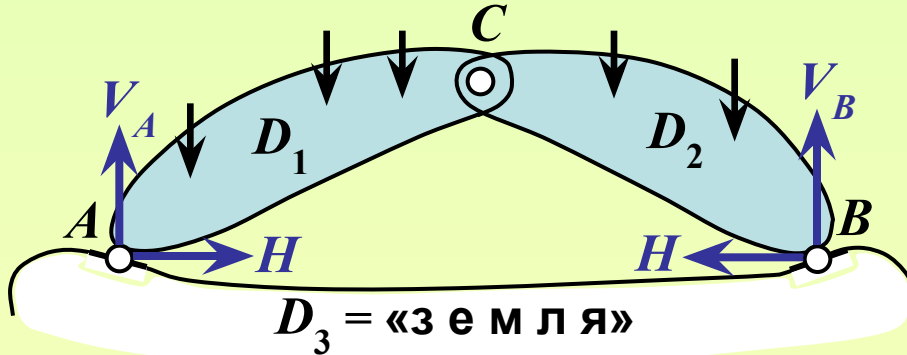
Трёхшарнирной

называется геометрически неизменяемая система, состоящая из трёх дисков, попарно соединённых тремя шарнирами *)

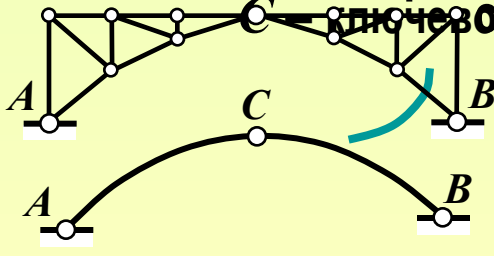
*) как правило, цилиндрическими

Два типа трёхшарнирных систем (ТШС)

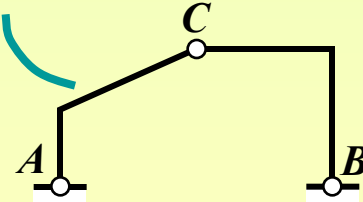
Распорные ТШС
(один из трёх дисков – «земля»)



Трёхшарнирная система
опорными дисками – фермами
ключевой дисками – распор

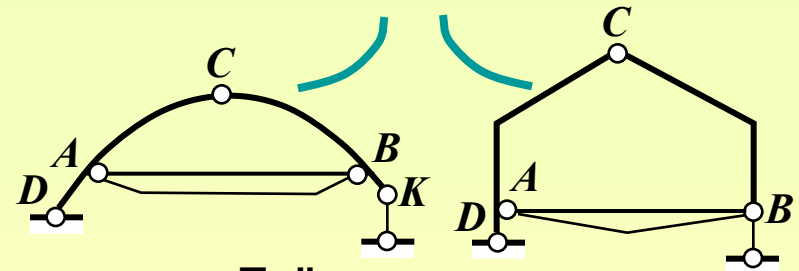
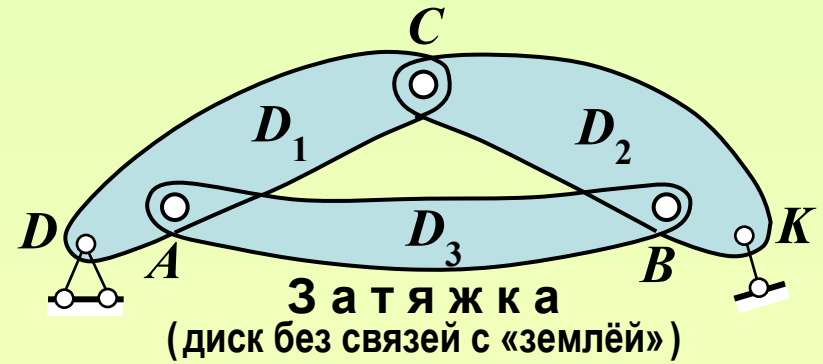


Трёхшарнирная арка



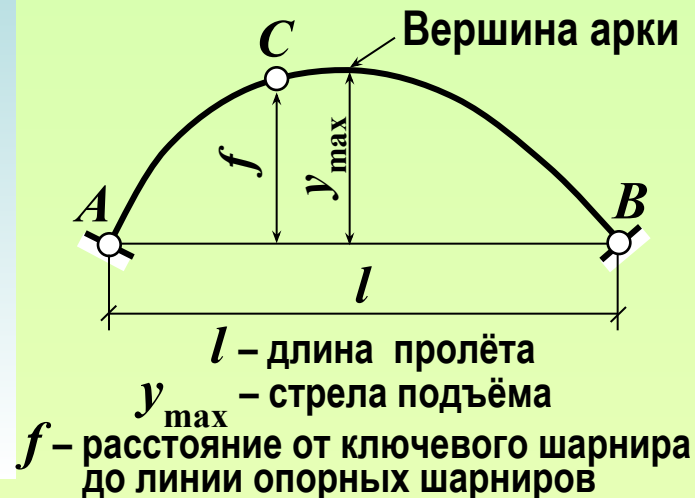
Трёхшарнирная рама

ТШС с затяжкой



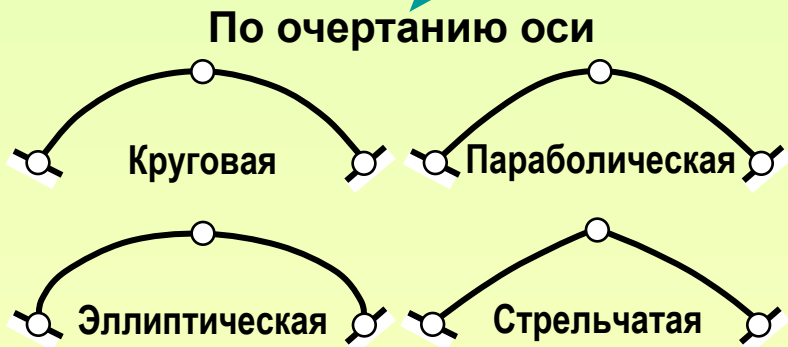
Трёхшарнирные арка с затяжками рама

Трёхшарнирной аркой называется трёхшарнирная система, два основных диска которой являются *криволинейными стержнями*, обращёнными, как правило, выпуклостью навстречу действующей нагрузке.



В случае ключевого шарнира в вершине арки $f = y_{\max}$

Трёхшарнирные арки



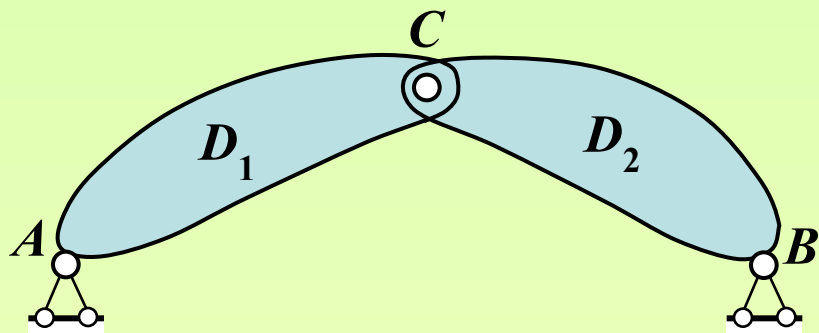
По относительной высоте

- пологие ($f/l < 1/8 \dots 1/10$)
- подъёмистые ($f/l > 1/4 \dots 1/3$)

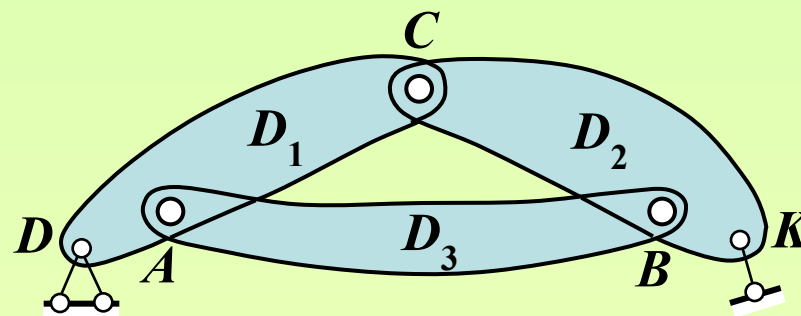
Трёхшарнирной рамой называется трёхшарнирная система, два основных диска которой являются *ломаными или прямолинейными стержнями*.

Кинематический анализ трёхшарнирных систем

1. Распорные ТШС



2. ТШС с затяжкой



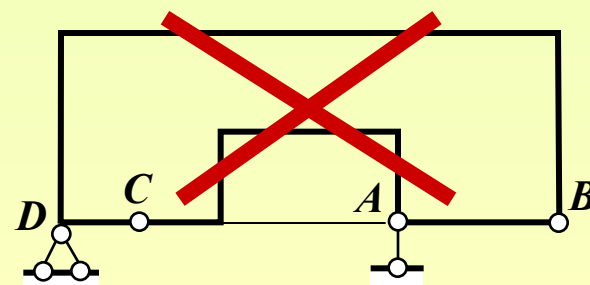
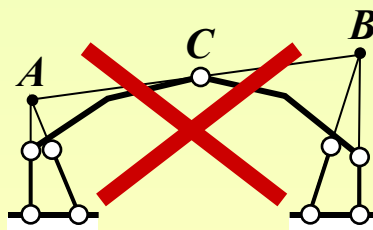
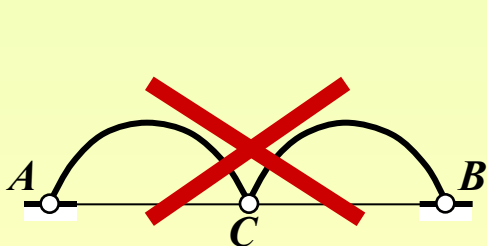
а) количественный анализ:

$$W = 3D - (2H + C_0)$$

$$D=2; H=1; C_0=4 \Rightarrow W=0 \quad \Leftrightarrow \quad D=3; H=3; C_0=3 \Rightarrow W=0$$

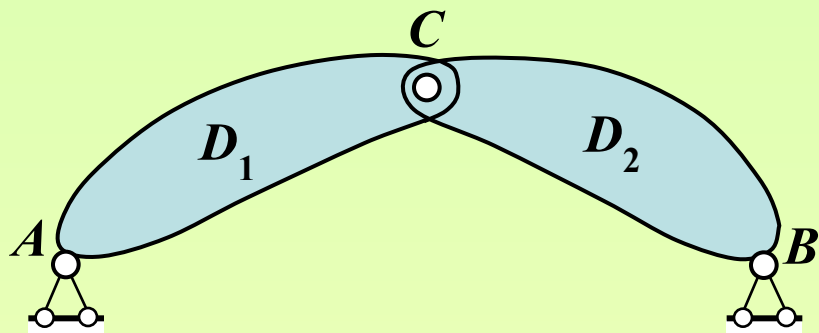
б) структурный анализ:

общее требование: шарниры A, B, C не должны лежать на одной прямой

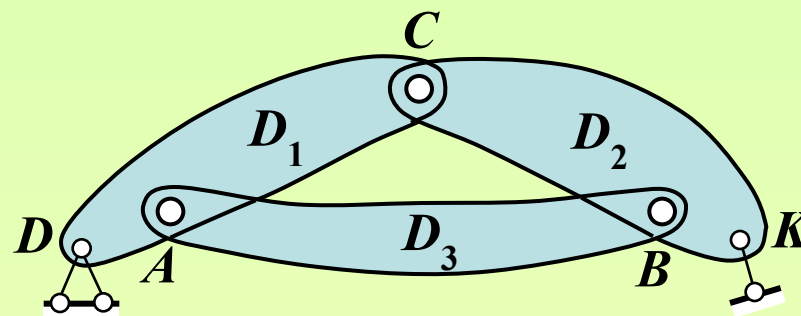


Кинематический анализ трёхшарнирных систем

1. Распорные ТШС



2. ТШС с затяжкой

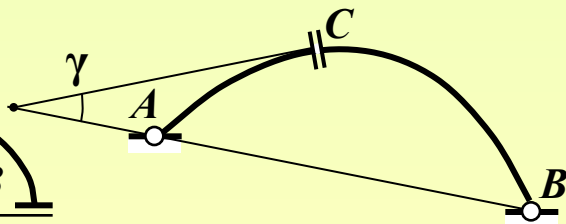
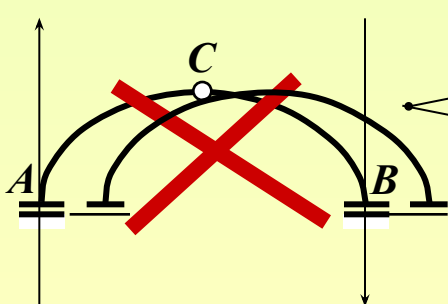


а) количественный анализ:

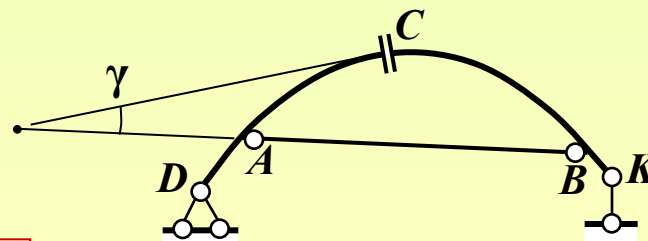
$$W = 3D - (2H + C_0) \quad C = 0 \implies W = 3D - (2H + C_0)$$

$$D = 2; H = 1; C_0 = 4 \implies W = 0 \quad \leftarrow \quad D = 3; H = 3; C_0 = 3 \implies W = 0$$

б) структурный анализ:
при наличии поступательных шарниров

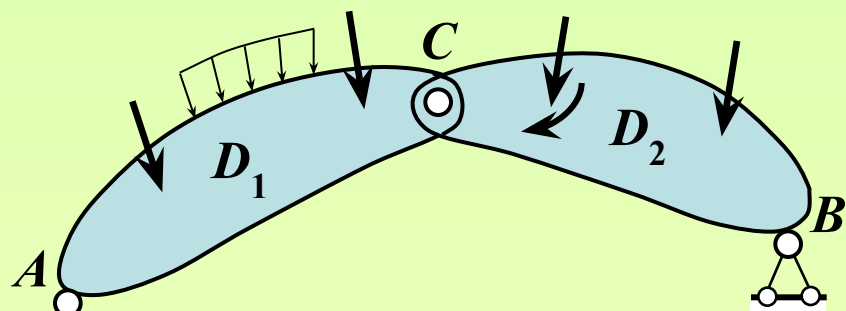


$$\gamma \neq 0!$$



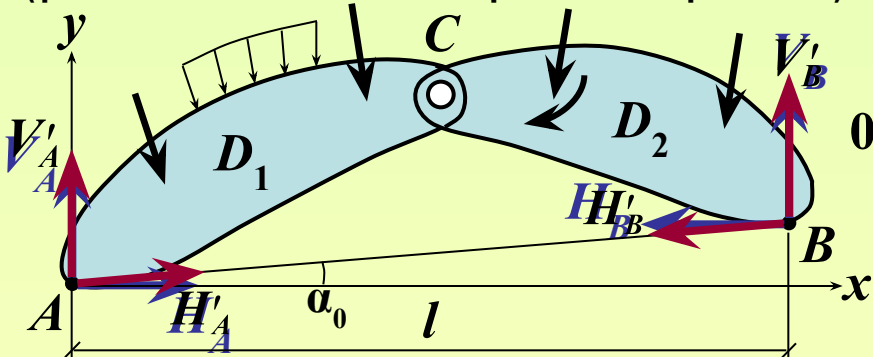
Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

1. Распорные ТШС



Вариант 2

(рациональный способ определения реакций)



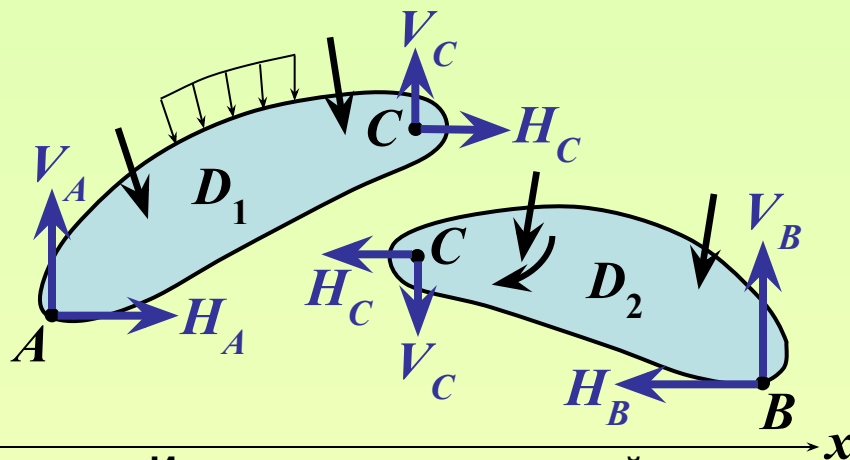
Шаг 1: уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 \rightarrow V'_B = \sum m_{A,F} / l \\ \sum m_B = 0 \rightarrow V'_A = \sum m_{B,F} / l \\ \sum x = 0 \rightarrow (H'_A - H'_B) \cos \alpha_0 + \sum x_F = 0 \end{cases}$$

Частный случай – вертикальная нагрузка $\rightarrow H'_A = H'_B$

Вариант 1

(общая система уравнений равновесия)



Искомые реакции связей:

$$V_A, H_A, V_B, H_B, V_C, H_C$$

Уравнения равновесия дисков:

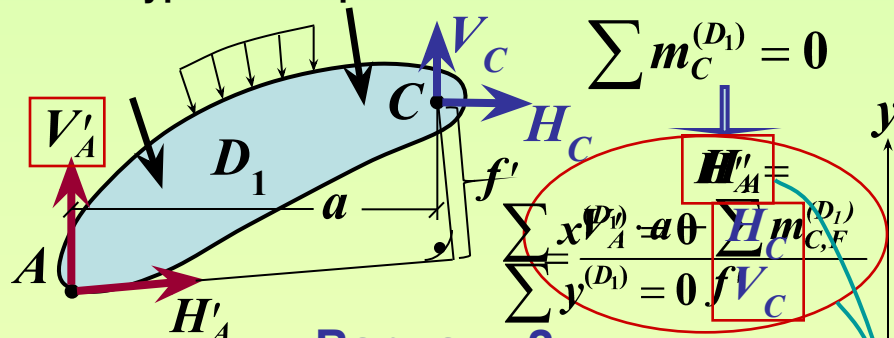
$$\begin{cases} \sum m_A^{(D_1)} = 0 \\ \sum x^{(D_1)} = 0 \\ \sum y^{(D_1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_A^{(D_2)} = 0 \\ \sum x^{(D_2)} = 0 \\ \sum y^{(D_2)} = 0 \end{cases}$$

$(V_A, H_A, V_C, H_C) \quad (V_B, H_B, V_C, H_C)$

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

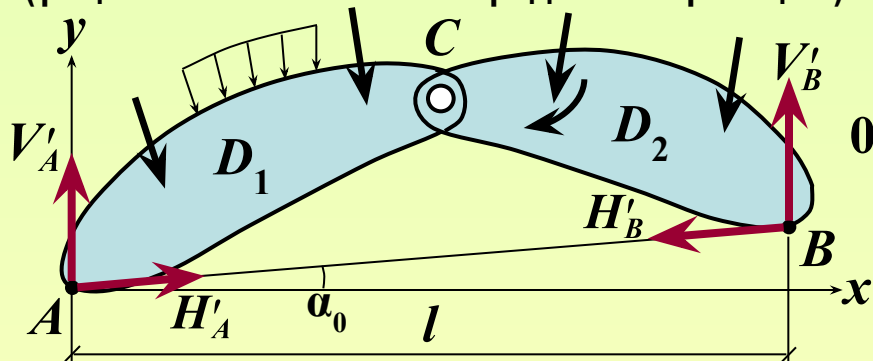
1. Распорные ТШС

Шаг 2: уравнения равновесия одного из дисков:



Вариант 2

(рациональный способ определения реакций)



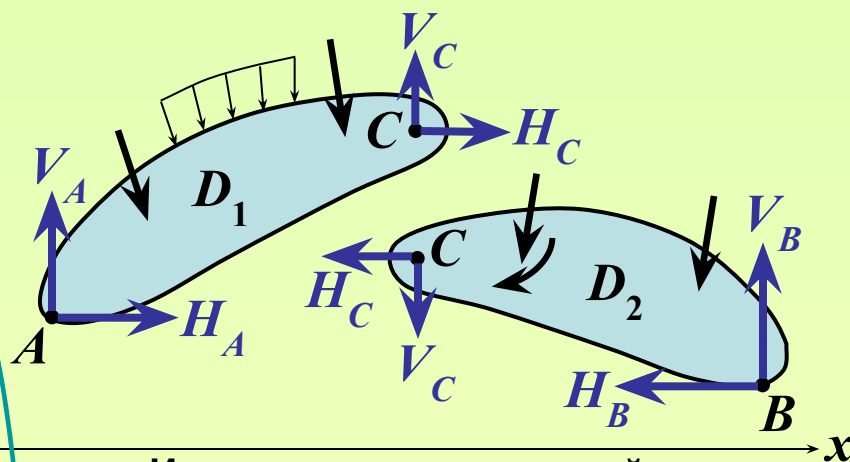
Шаг 1: уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 \rightarrow V'_B = \sum m_{A,F} / l \\ \sum m_B = 0 \rightarrow V'_A = \sum m_{B,F} / l \\ \sum x = 0 \rightarrow (H'_A - H'_B) \cos \alpha_0 + \sum x_F = 0 \end{cases}$$

Частный случай – вертикальная нагрузка $\rightarrow H'_A = H'_B$

Вариант 1

(общая система уравнений равновесия)



Искомые реакции связей:

$$V_A, H_A, V_B, H_B, V_C, H_C$$

Уравнения равновесия дисков:

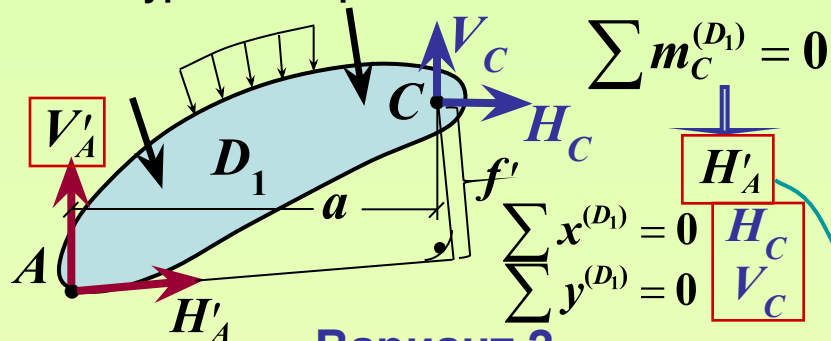
$$\begin{cases} \sum m_A^{(D_1)} = 0 \\ \sum x^{(D_1)} = 0 \\ \sum y^{(D_1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_A^{(D_2)} = 0 \\ \sum x^{(D_2)} = 0 \\ \sum y^{(D_2)} = 0 \end{cases}$$

(V_A, H_A, V_C, H_C) (V_B, H_B, V_C, H_C)

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

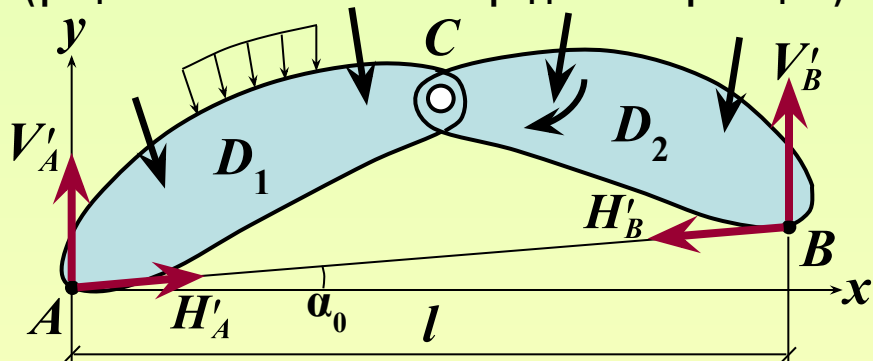
1. Распорные ТШС

Шаг 2: уравнения равновесия одного из дисков:



Вариант 2

(рациональный способ определения реакций)



Шаг 1: уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 \rightarrow V'_B = \sum m_{A,F} / l \\ \sum m_B = 0 \rightarrow V'_A = \sum m_{B,F} / l \\ \sum x = 0 \rightarrow (H'_A - H'_B) \cos \alpha_0 + \sum x_F = 0 \end{cases}$$

Частный случай – вертикальная нагрузка $\rightarrow H'_A = H'_B$

Переход к ортогональным составляющим опорных реакций:



$$\begin{aligned} H_A &= H'_A \cos \alpha_0 & H_B &= H'_B \cos \alpha_0 \\ V_A &= V'_A + H'_A \sin \alpha_0 & V_B &= V'_B - H'_B \sin \alpha_0 \end{aligned}$$

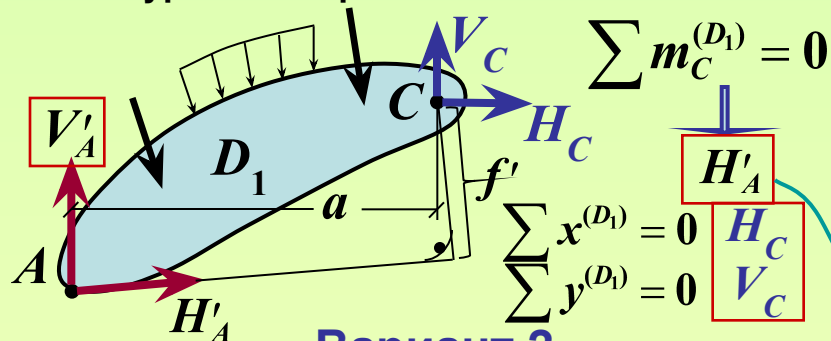
Алгоритм определения реакций по варианту 2:

1. Реакции опор раскладываются на составляющие – вертикальные и по направлению линии AB.
2. Записываются уравнения равновесия системы в целом (моментов относительно точек A и B и проекций на ось x), из которых находятся вертикальные реакции опор A и B.
3. Система разделяется сечением по ключевому шарниру на два диска (**обязательная операция!**). Для любого из дисков записывается уравнение равновесия моментов относительно точки C, из которого находится реакция H'_A (или H'_B).
4. Из уравнения $\sum x = 0$ для всей системы определяется реакция H'_B (H'_A).

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

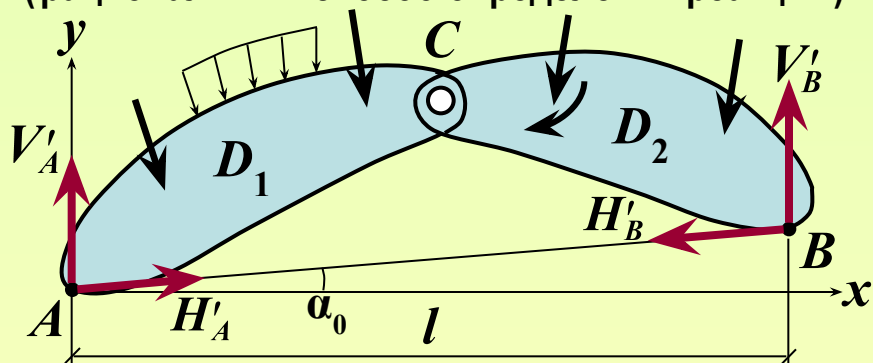
1. Распорные ТШС

Шаг 2: уравнения равновесия одного из дисков:



Вариант 2

(рациональный способ определения реакций)



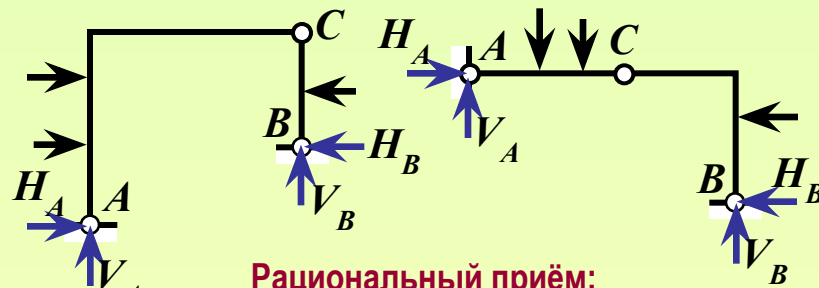
Шаг 1: уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_A = 0 \rightarrow V'_B = \sum m_{A,F} / l \\ \sum m_B = 0 \rightarrow V'_A = \sum m_{B,F} / l \\ \sum x = 0 \rightarrow (H'_A - H'_B) \cos \alpha_0 + \sum x_F = 0 \end{cases}$$

H'_B

Особые случаи распорных ТШС, для которых целесообразно изменение порядка расчёта в сравнении с общим алгоритмом

Общий признак: ключевой шарнир C располагается на одной вертикали (или горизонтали) с одним из опорных шарниров.



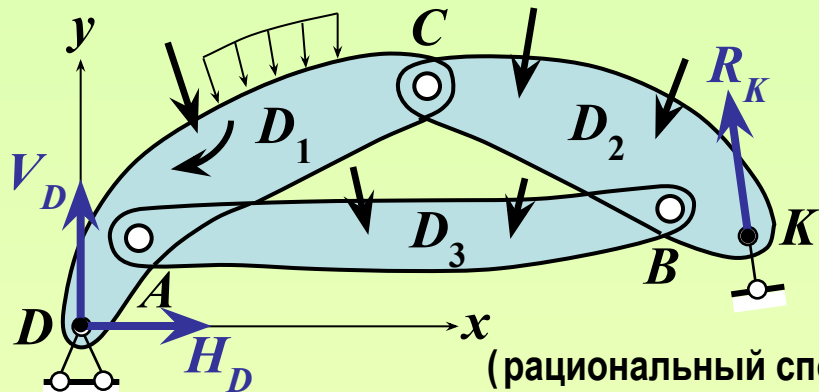
Рациональный приём:

В первую очередь рассматривается равновесие диска, которому принадлежат шарниры, расположенные на одной вертикали (горизонтали) и находится реакция H_A (H_B); затем используются уравнения равновесия системы в целом.

$$\begin{array}{l|l} \sum m_C^{(CB)} = 0 \rightarrow H_B & \sum m_C^{(AC)} = 0 \rightarrow V_A \\ \sum m_A = 0 \rightarrow V_B & \sum m_B = 0 \rightarrow H_A \\ \sum x = 0 \rightarrow H_A & \sum x = 0 \rightarrow H_B \\ \sum y = 0 \rightarrow V_A & \sum y = 0 \rightarrow V_B \end{array}$$

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

2. ТШС с затяжкой



Вариант 1

Формирование и решение системы уравнений равновесия дисков D_1 , D_2 и D_3 (по 3 уравнения для каждого диска – всего 9 уравнений) с девятью неизвестными реакциями внешних и внутренних связей – $V_A, H_A, V_B, H_B, V_C, H_C, V_D, H_D, R_K$

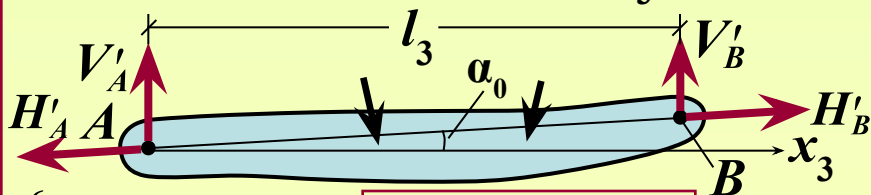
Вариант 2

(рациональный способ определения реакций связей)

Шаг 1
Уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_D = 0 \rightarrow R_K = \sum m_{D,F} / h_R \\ \sum x = 0 \rightarrow H_D \\ \sum y = 0 \rightarrow V_D \end{cases}$$

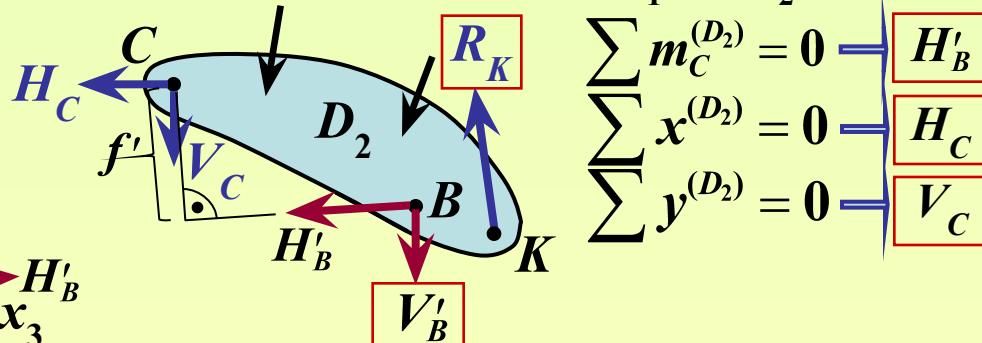
Шаг 2
Уравнения равновесия затяжки (D_3):



$$\begin{cases} \sum m_A^{(AB)} = 0 \rightarrow V'_B = \sum m_{A,F}^{(AB)} / L_3 \\ \sum m_B^{(AB)} = 0 \rightarrow V'_A = \sum m_{B,F}^{(AB)} / L_3 \\ \sum x_3^{(AB)} = 0 \rightarrow (H'_B - H'_A) \cos \alpha_0 + \sum x_{3,F}^{(AB)} = 0 \end{cases}$$

Шаг 3

Уравнения равновесия одного из дисков (D_1 или D_2):



$$\begin{cases} \sum m_C^{(D_2)} = 0 \rightarrow H'_B \\ \sum x^{(D_2)} = 0 \rightarrow H'_C \\ \sum y^{(D_2)} = 0 \rightarrow V'_C \end{cases}$$

Частные случаи:

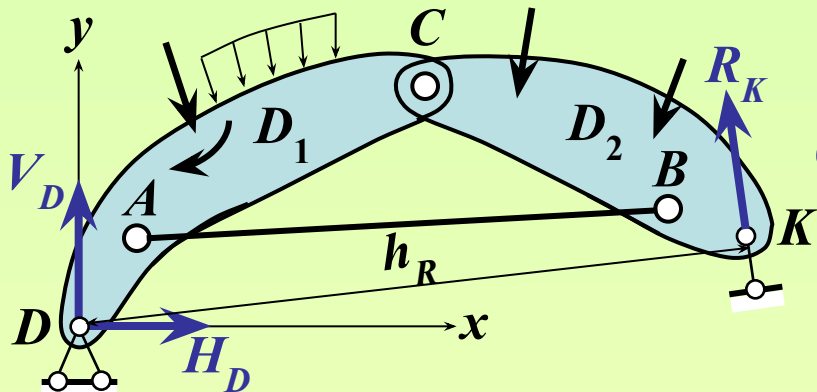
- Вертикальные нагрузки на затяжке
- Незагруженная затяжка $\rightarrow V'_A = V'_B = 0$
- Прямолинейная незагруженная затяжка: $N_3 = \text{const} = H'_A = H'_B$; $M_3 = 0$; $Q_3 = 0$

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

2. ТШС с затяжкой

Трёхшарнирная система с прямолинейной незагруженной затяжкой

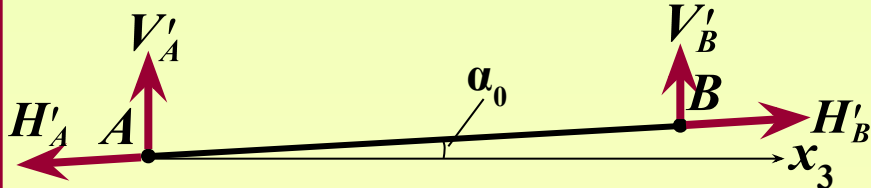
Рациональный способ определения реакций связей



Шаг 1
Уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_D = 0 \rightarrow R_K = \sum m_{D,F} / h_R \\ \sum x = 0 \rightarrow H_D \\ \sum y = 0 \rightarrow V_D \end{cases}$$

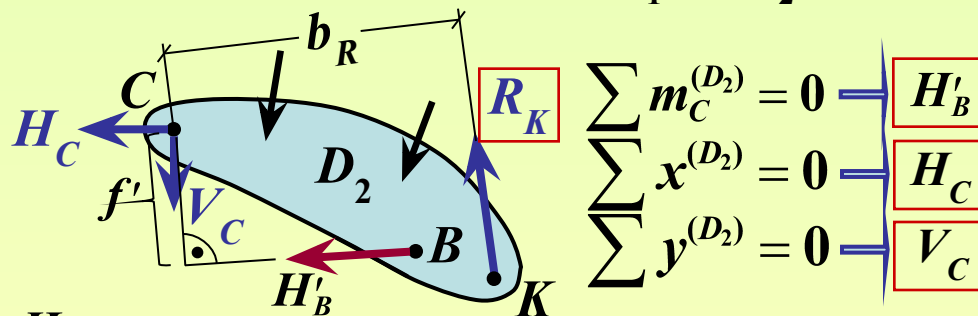
Шаг 2
Уравнения равновесия затяжки (D_3):



$$\begin{cases} \sum m_A^{(AB)} = 0 \rightarrow V'_B = 0 \\ \sum m_B^{(AB)} = 0 \rightarrow V'_A = 0 \\ \sum x_3^{(AB)} = 0 \rightarrow (H'_B - H'_A) \cos \alpha_0 = 0 \rightarrow H'_A = H'_B = N_3 = \text{const} ; M_3 = 0 ; Q_3 = 0 \end{cases}$$

Шаг 3

Уравнения равновесия одного из дисков (D_1 или D_2):



$$\begin{cases} \sum m_C^{(D_2)} = 0 \rightarrow H'_B \\ \sum x^{(D_2)} = 0 \rightarrow H_C \\ \sum y^{(D_2)} = 0 \rightarrow V_C \end{cases}$$

Продольная сила в прямолинейной незагруженной затяжке:

$$N_3 = H'_B = \frac{\sum m_{C,F}^{(D_2)} - R_K \cdot b_R}{f'}$$

$$N_3 = H'_B = \frac{\sum m_{C,F}^{(D_2)} - R_K \cdot b_R}{f'}$$

Определение реакций связей в трёхшарнирных системах

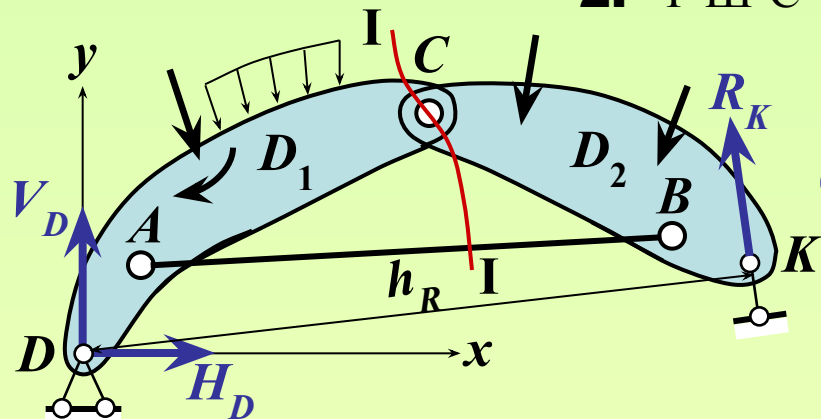
2. ТШС с затяжкой

Трёхшарнирная система с прямолинейной незагруженной затяжкой

Рациональный способ определения реакций связей

Шаг 3

Уравнения равновесия одного из дисков (D_1 или D_2):

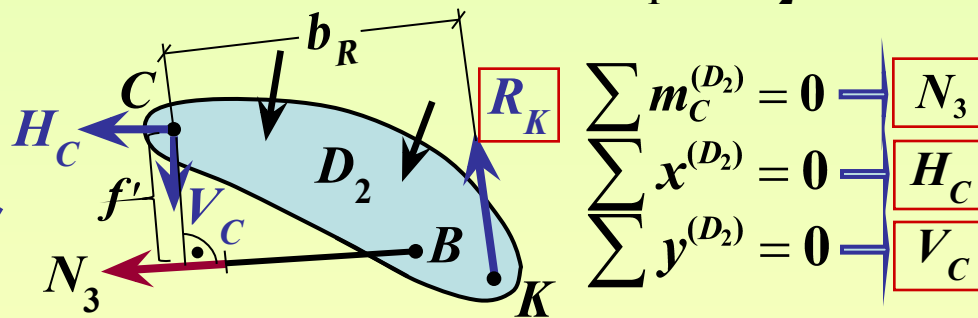


Шаг 1
Уравнения равновесия системы в целом:

$$\begin{cases} \sum m_D = 0 \rightarrow R_K = \sum m_{D,F} / h_R \\ \sum x = 0 \rightarrow H_D \\ \sum y = 0 \rightarrow V_D \end{cases}$$

Шаг 2

Разделение системы сечением I-I по ключевому шарниру и затяжке (стандартный приём)

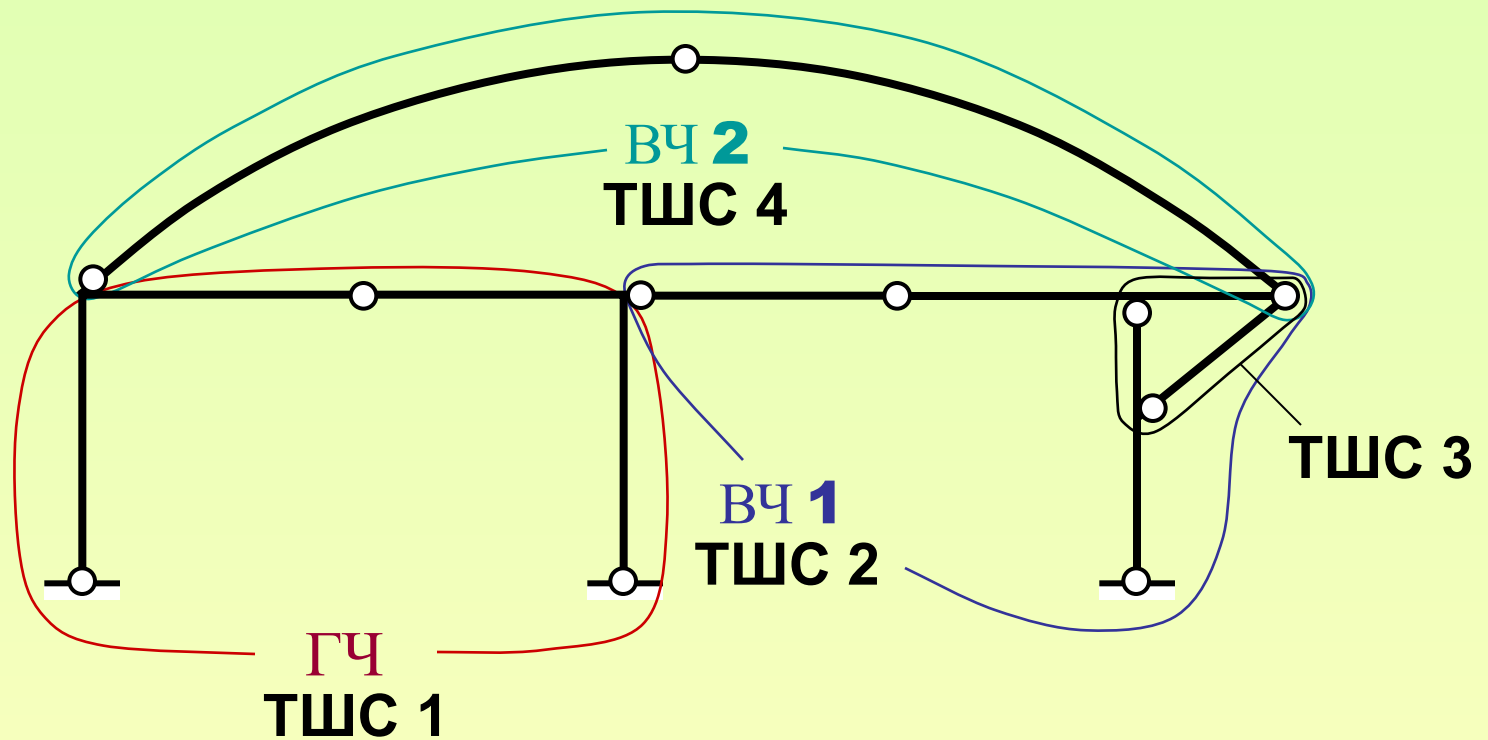


$$\begin{cases} \sum m_C^{(D_2)} = 0 \rightarrow N_3 \\ \sum x^{(D_2)} = 0 \rightarrow H_C \\ \sum y^{(D_2)} = 0 \rightarrow V_C \end{cases}$$

Продольная сила в прямолинейной незагруженной затяжке:

$$N_3 = \frac{\sum m_{C,F}^{(D_2)} - R_K \cdot b_R}{f'}$$

Составные системы с трёхшарнирными частями



Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 14»)*

1. Что такое трёхшарнирная система? [\(2\)](#)
2. Основные типы трёхшарнирных систем. [\(2\)](#)
3. Что такое распор? [\(2\)](#)
4. Что такое затяжка? [\(2\)](#)
5. Разновидности распорных трёхшарнирных систем. [\(2\)](#)
6. Разновидности трёхшарнирных систем с затяжкой. [\(2\)](#)
7. Что такое трёхшарнирная арка? Как классифицируются трёхшарнирные арки? [\(3\)](#)
8. Что такое трёхшарнирная рама? [\(3\)](#)
9. Кинематический анализ трёхшарнирных систем разных типов. [\(4\)](#)
10. Требования к расположению связей в трёхшарнирных системах. [\(4, 5\)](#)
11. Можно ли в вершине арки с опорными цилиндрическими шарнирами на одном уровне поставить вертикальный поступательный шарнир? [\(5\)](#)
12. Можно ли в трёхшарнирной системе выделить главную и второстепенную части?
13. Порядок определения реакций связей в трёхшарнирной распорной системе. [\(6–8\)](#)
14. От чего зависит распор трёхшарнирной системы? [\(7\)](#)
15. Рациональный порядок определения реакций связей в трёхшарнирной системе при расположении ключевого и одного из опорных шарниров на одной вертикали (или горизонтали). [\(9\)](#)
16. Порядок определения реакций связей в трёхшарнирной системе с затяжкой. [\(10\)](#)
17. Каков характер работы незагруженной прямолинейной затяжки? [\(10, 11\)](#)
18. Как определяется продольная сила в прямолинейной незагруженной затяжке? [\(11\)](#)
19. Стандартный приём определения продольной силы в прямолинейной затяжке трёхшарнирной системы. [\(12\)](#)
20. Порядок расчёта составных систем с трёхшарнирными частями. [\(13\)](#)

*) Только в режиме «Показ слайдов»