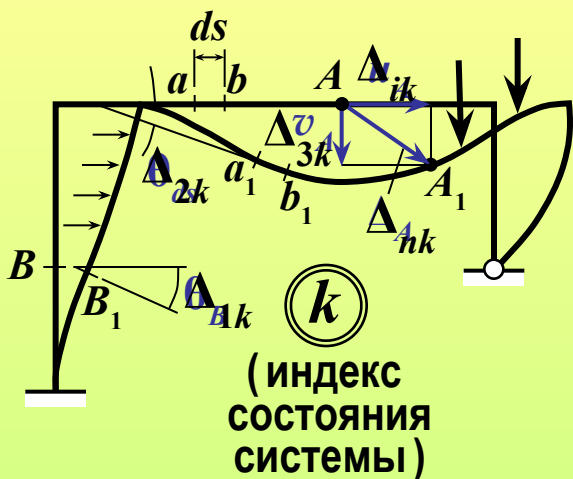




# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

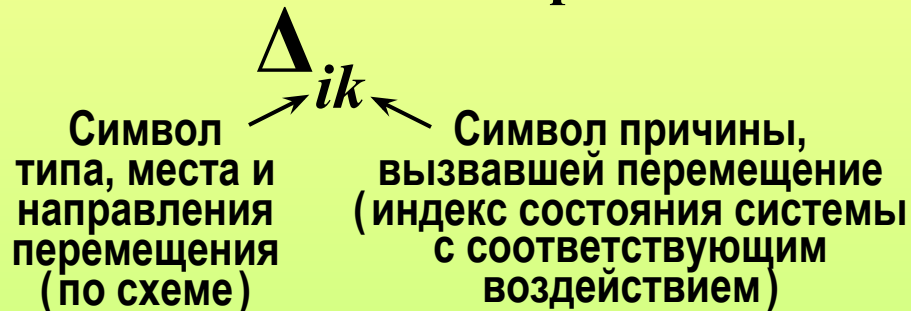
## Часть I

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ  
СИСТЕМ



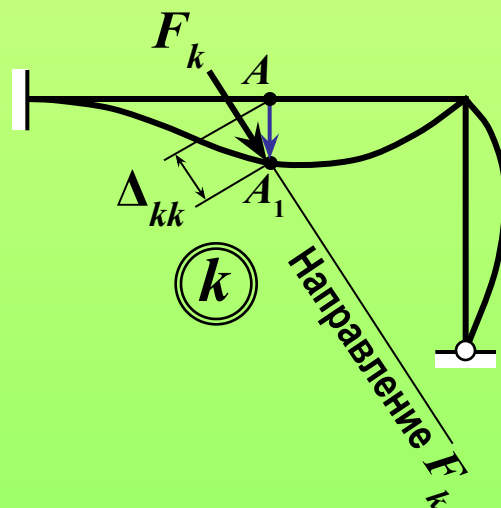
**Перемещения** → линейные  $\Delta_A, u_A, v_A$   
 → угловые  $\theta_A, \theta_{ds}$

**Обобщённое обозначение перемещения:**



*Читается:* перемещение такой-то точки (сечения) по такому-то направлению от  $k$ -го воздействия.

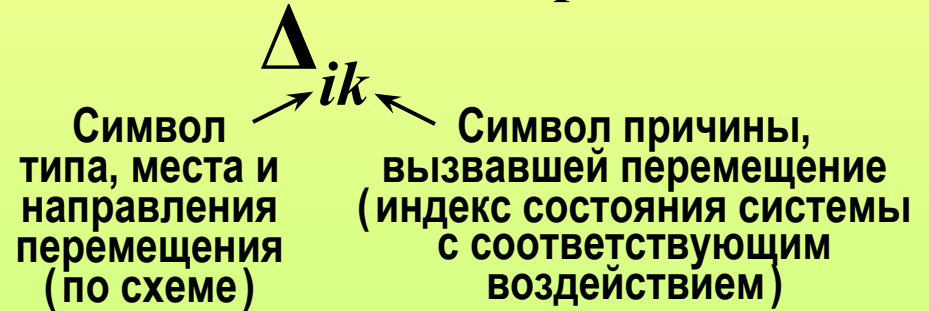
Если  $i=k$ , то  $\Delta_{kk}$  – **собственное** перемещение (перемещение, вызванное **силовым** воздействием  $F_k$ , по его направлению)



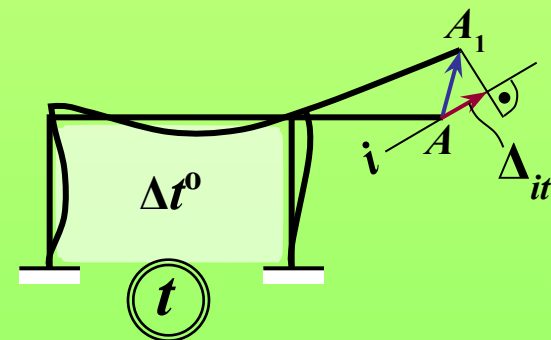
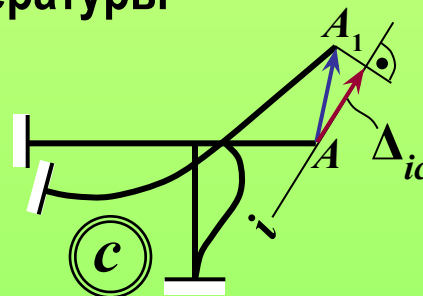
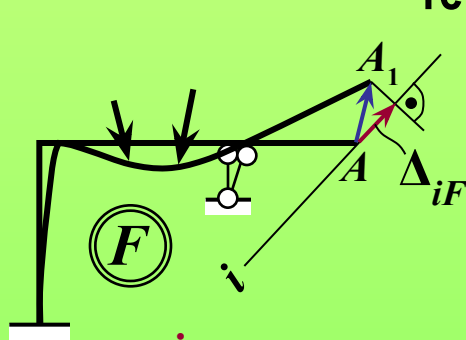
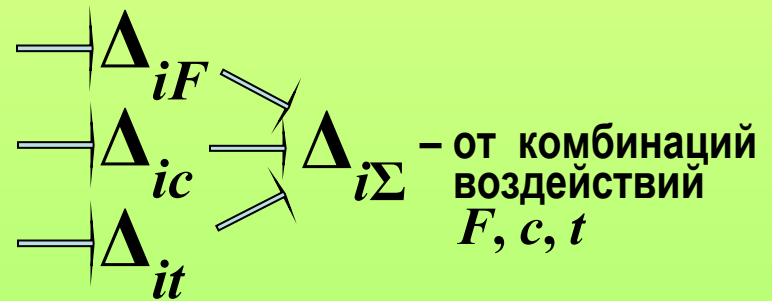
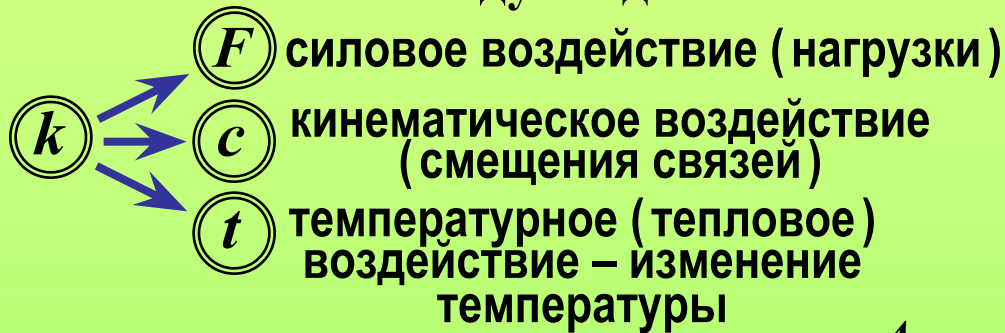


**Перемещения** → линейные  $\Delta_A, u_A, v_A$   
 → угловые  $\theta_A, \theta_{ab}$

**Обобщённое обозначение перемещения:**



**Конкретизация индекса состояния системы по виду воздействия:**



*i* – направление искомого перемещения

# Единичные перемещения

Перемещения (линейные, угловые), возникающие от **равных единице механических** воздействий (силовых или кинематических), называются **единичными перемещениями**.

Обозначение единичных перемещений:



От единичного **СИЛОВОГО** воздействия

$\delta_{ik}$

Символ типа, места и направления перемещения (по схеме)

От единичного **КИНЕМАТИЧЕСКОГО** воздействия

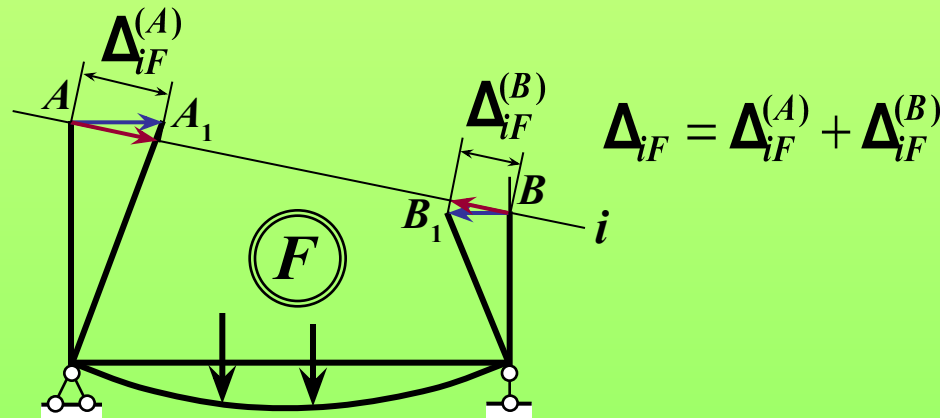
$\delta'_{ik}$

Символ причины, вызвавшей перемещение (индекс состояния системы с соответствующим единичным воздействием)

$i$  – направление искомого перемещения

## Групповое перемещение

Пример: относительное (взаимное) линейное перемещение точек  $A$  и  $B$  по направлению линии  $AB$ .



**МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ**  
**(метод вспомогательных единичных нагрузок)**  
**J.C. Maxwell (1864), O. Mohr (1874)**

**ИДЕЯ МЕТОДА МАКСВЕЛЛА – МОРА (ММ-М)**

**В дополнение к действительному состоянию**  
**рассчитываемой системы (при заданных воздействиях)**  
**рассматривается *вспомогательное* (фиктивное) состояние**  
***с единичным силовым воздействием***  
**по направлению искомого перемещения;**  
**силовые факторы вспомогательного единичного состояния**  
**затем используются, вместе с соответствующими**  
**характеристиками действительного состояния,**  
**для вычисления искомого перемещения.**

**МЕТОД МАКСВЕЛЛА – МОРА**  
**ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ**  
**(метод вспомогательных единичных нагрузок)**

**Правило задания**  
**вспомогательного единичного воздействия**

**Во вспомогательном (фиктивном) состоянии системы, рассматриваемом *независимо (отдельно)* от действительного состояния, в месте, где определяется искомое перемещение, по его направлению прикладывается численно равное единице силовое воздействие, тип которого (сила, момент либо группа сил и/или моментов) соответствует типу определяемого перемещения (линейное или угловое, одиночное либо обобщённое).**

**В общем случае вспомогательное (фиктивное) единичное воздействие – обобщённое, соответствующее определяемому обобщённому (групповому) перемещению.**

**Кинематическое свойство вспомогательного единичного воздействия:**  
**оно (воздействие) таково, что способно совершить работу на определяемом перемещении.**

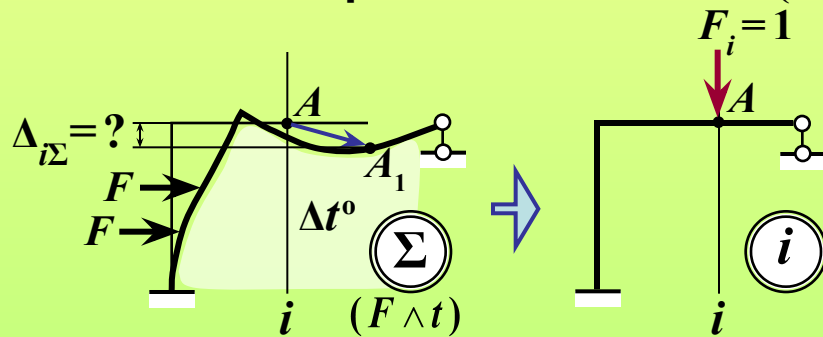
# МЕТОД МАКСВЕЛЛА - МОРА

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ (метод вспомогательных единичных нагрузок)

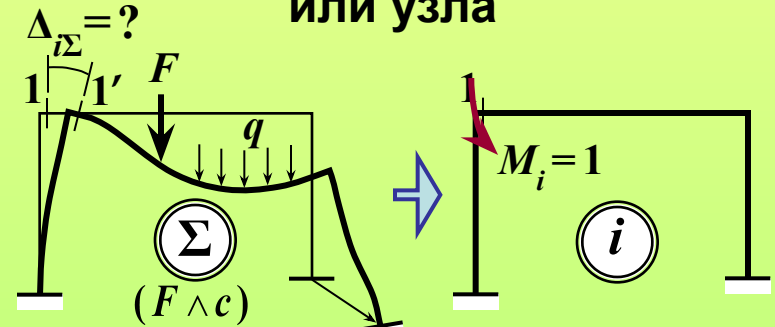
### Типовые случаи вспомогательных единичных состояний

а) при определении одиночных перемещений

Линейное перемещение точки ( $A$ )

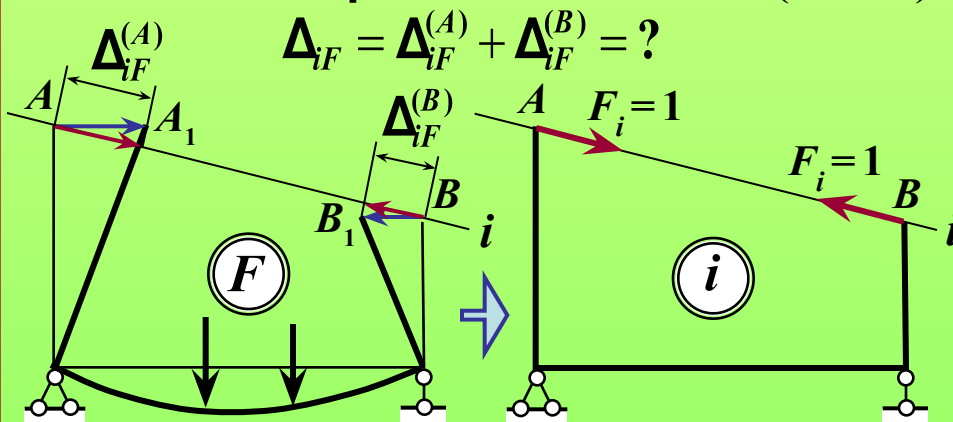


Угол поворота сечения (1) или узла

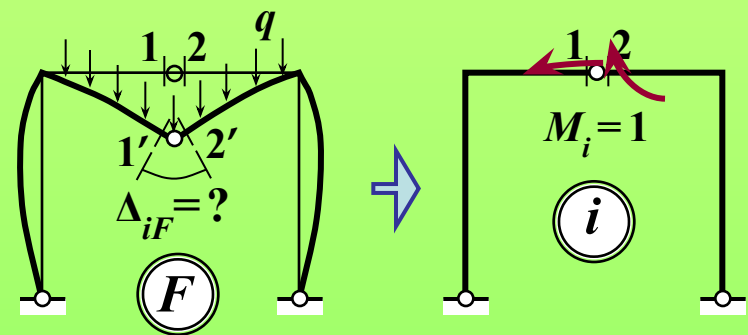


б) при определении групповых перемещений

Относительное (взаимное) линейное перемещение точек ( $A$  и  $B$ )



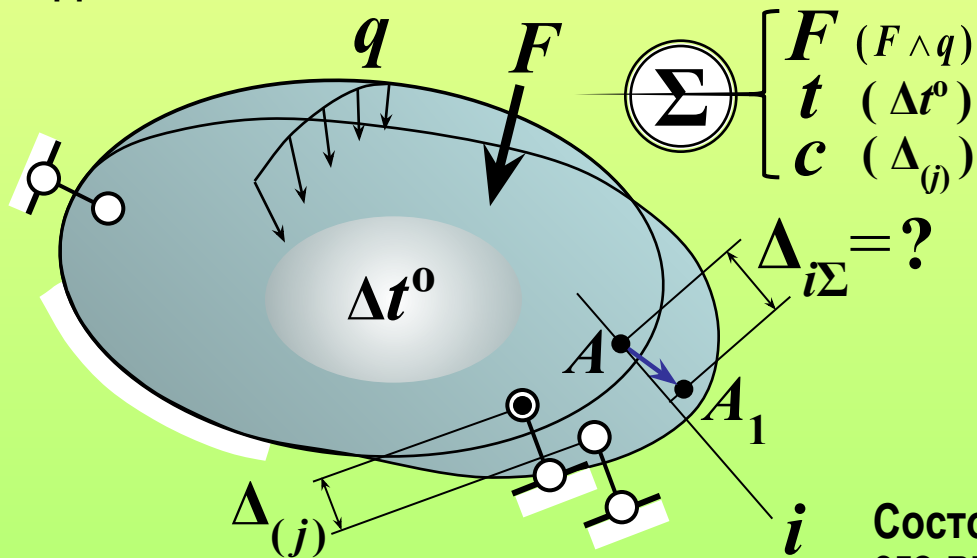
Относительный (взаимный) угол поворота сечений (1 и 2)



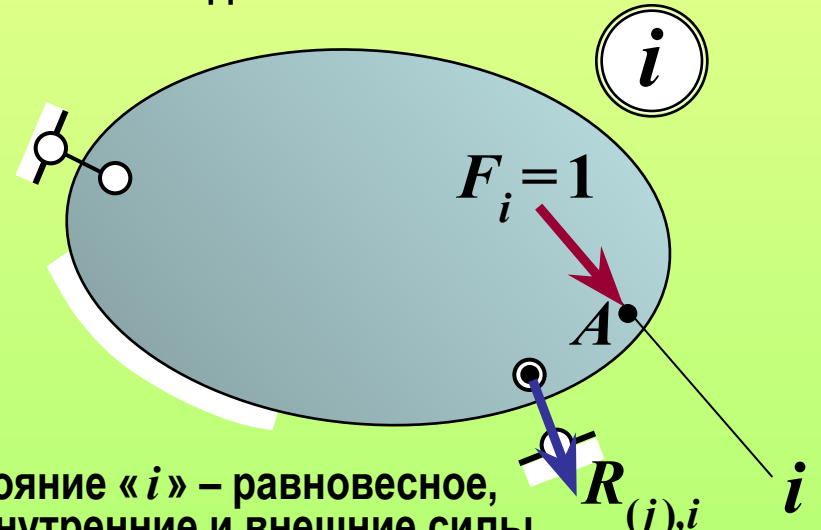
# МЕТОД МАКСВЕЛЛА - МОРА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ (метод вспомогательных единичных нагрузок)

## Базовая формула ММ-М в общем случае деформируемой системы

Действительное состояние системы



Вспомогательное (фиктивное) единичное состояние



Состояние «i» – равновесное, его внутренние и внешние силы удовлетворяют *принципу Лагранжа*:

Из уравнения возможных работ, с учётом того, что  $F_{(j),i} = 1 \cdot \Delta_{(j)}$

При одновременных смещениях связей

$$\Delta_{(i\Sigma)} \Rightarrow \Delta W_{int, i\Sigma} = \sum_{(j)} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

$$W_{ext, i\Sigma} = F_i \cdot \Delta_{i\Sigma} + \sum_{(j)} R_{(j),i} \cdot \Delta_{(j)}$$

базовая формула ММ-М

$$W_{ext, i\Sigma} + W_{int, i\Sigma} = 0$$

i – символ состояния, внешние и внутренние силы которого совершают возможную работу;

$\Sigma$  = индекс виртуальных перемещений.

В случае *линейно деформируемой системы* (ЛДС) перемещения действительного состояния могут быть приняты в качестве виртуальных, т.е.  $k = \Sigma$



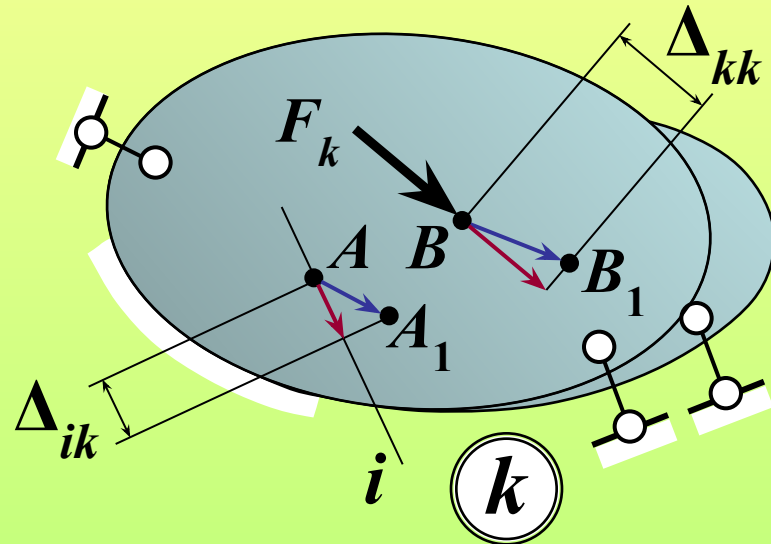
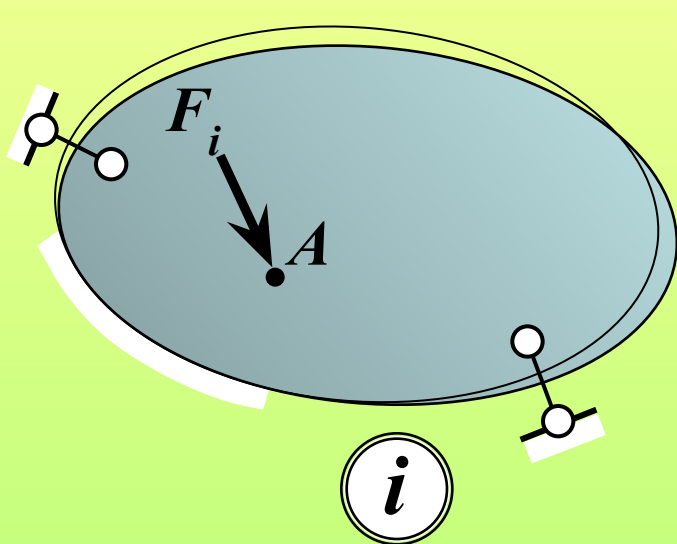
**ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА  
ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ.  
ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ**

***Возможной работой*** внешних (внутренних) сил называется работа, совершаемая этими силами на перемещениях (деформациях), вызванных другими воздействиями (реальными или виртуальными).

***Действительной работой*** внешних (внутренних) сил называется работа, совершаемая ими на перемещениях (деформациях), вызванных самими этими силами.

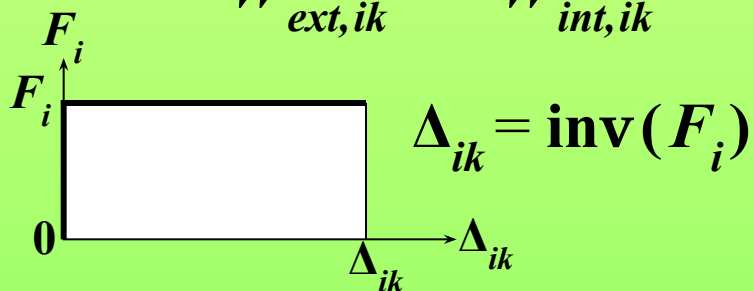
***Потенциальная энергия деформации*** – это энергия, накапливаемая в материале системы в процессе его деформирования заданными воздействиями и возвращаемая в виде механической работы при разгрузке системы (материала).

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



**Возможные работы** внешних и внутренних сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $k$ -го состояния:

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik}$$

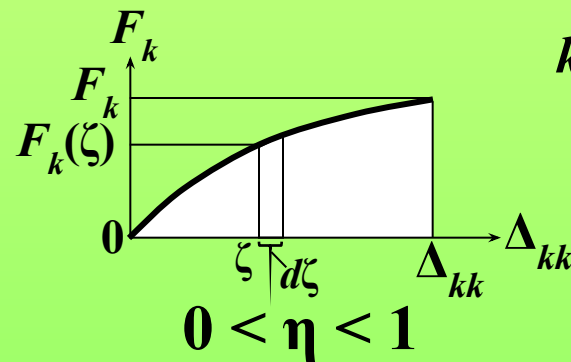


$$\Delta_{ik} = \text{inv}(F_i)$$

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i^* \Delta_{ik}$$

$\Delta_{kk}$  – собственное перемещение  
 $\Delta_{ik}$  – побочное перемещение

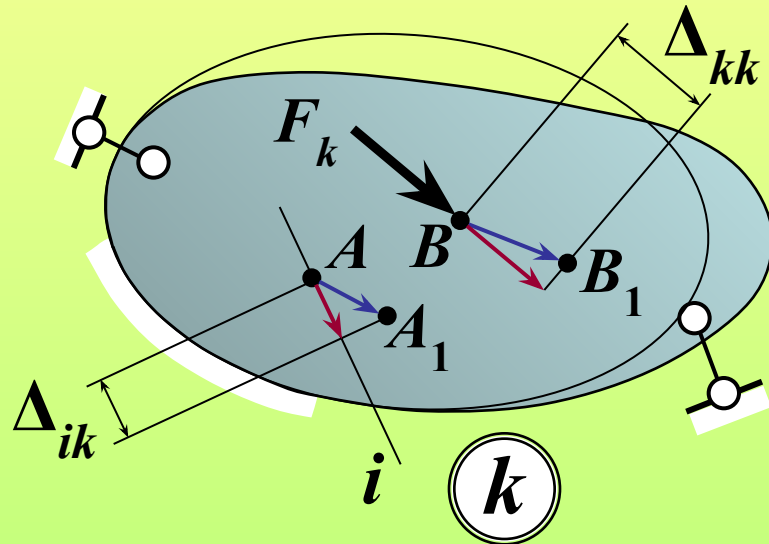
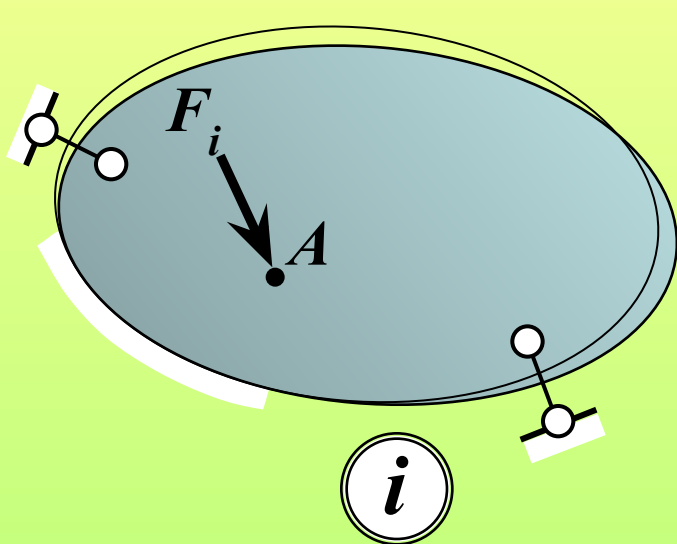
**Действительная работа** внешних сил  $k$ -го состояния:



$$W_{ext,kk} = \int_0^{\Delta_{kk}} F_k(\zeta) d\zeta = \eta F_k \Delta_{kk}$$

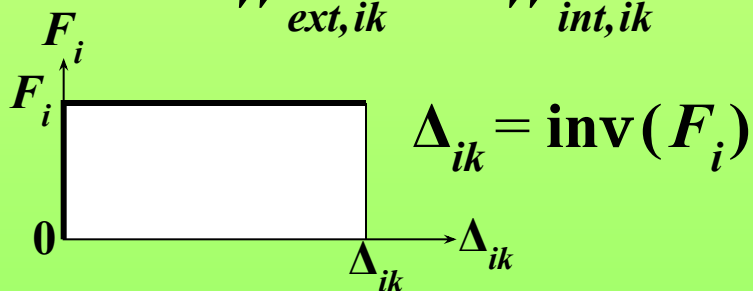
$$0 < \eta < 1$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



**Возможные работы** внешних и внутренних сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $k$ -го состояния:

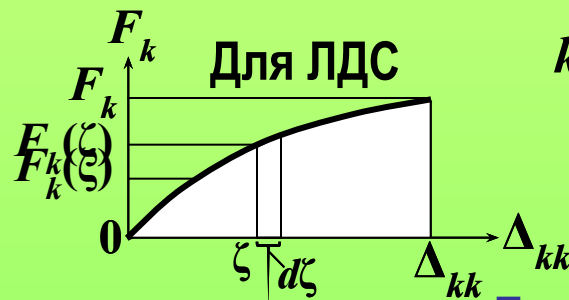
$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik}$$



$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i \cdot \Delta_{ik}$$

$\Delta_{kk}$  – собственное перемещение  
 $\Delta_{ik}$  – побочное перемещение

**Действительная работа** внешних сил  $k$ -го состояния:

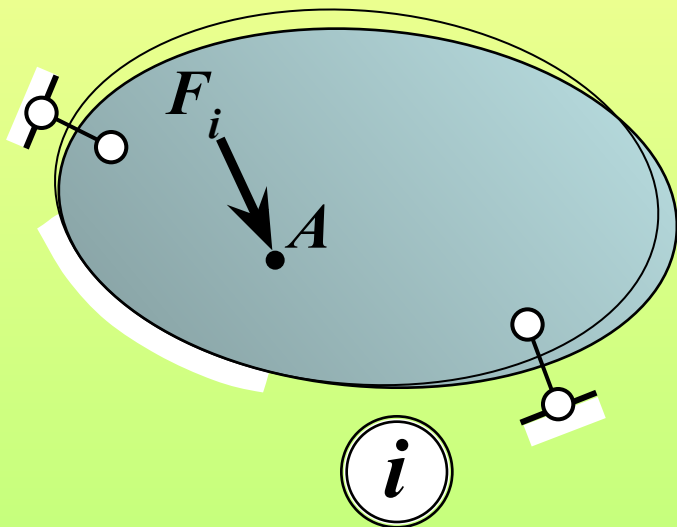


$$W_{ext,kkt,\bar{k}\bar{k}} \bar{U} = \int_0^{\Delta_{kk}} F_k(\zeta) d\zeta = \eta F_k \Delta_{kk}$$

$U$ -ПЭУД  $\eta = 1/2$

**Теорема Клапейрона**  
 (В.П.Е. Струве, 1834)

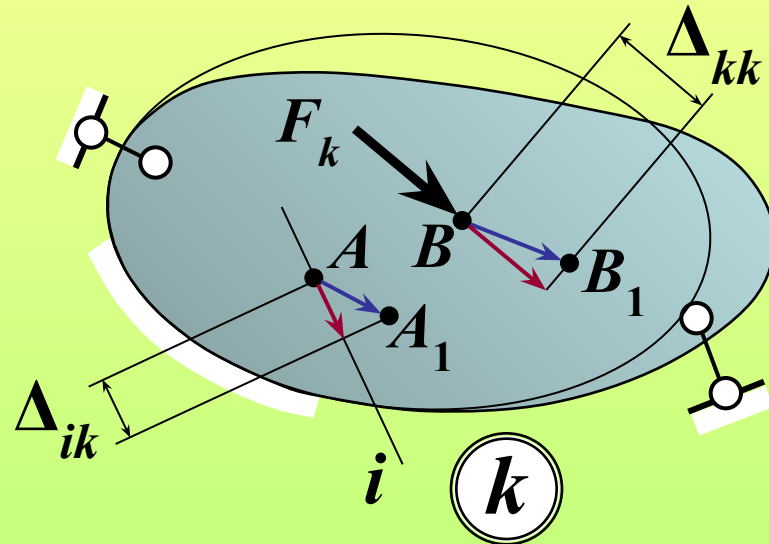
# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



**Возможные работы** внешних и внутренних сил  $i$ -го состояния на перемещениях  $k$ -го состояния:

$$W_{ext,ik} = -W_{int,ik} = F_i^* \Delta_{ik}$$

Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил и ПЭУД через внешние силовые факторы и перемещения (через обобщённые нагрузки и обобщённые перемещения).

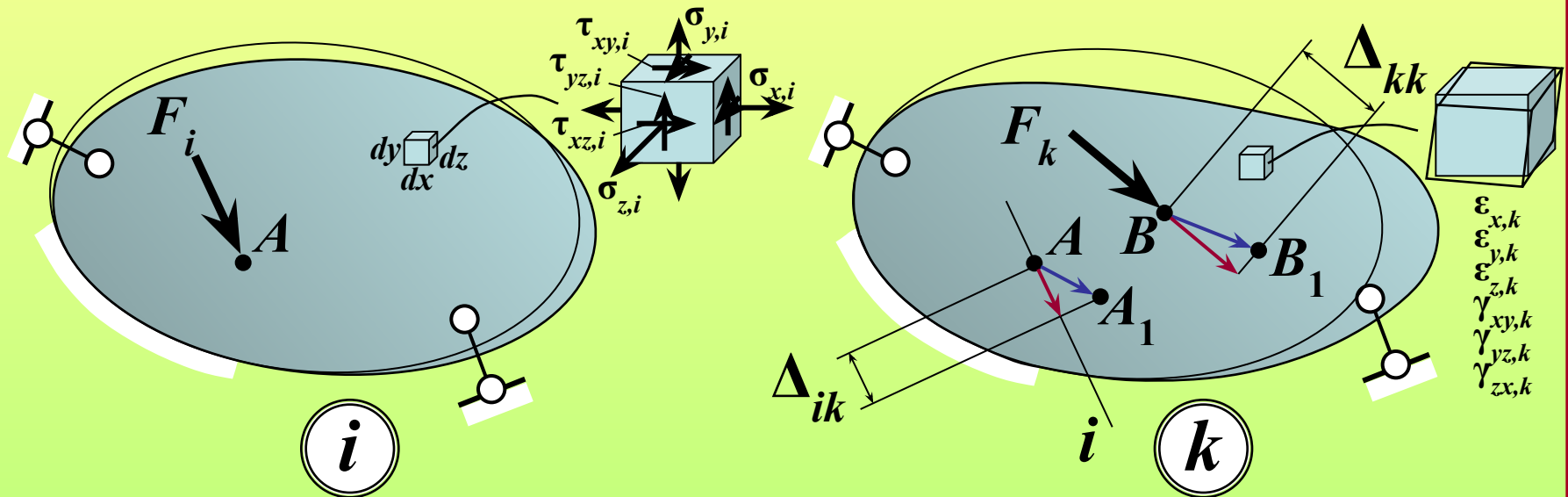


**Действительная работа** внешних и внутренних сил  $k$ -го состояния, потенциальная энергия упругой деформации (ПЭУД) ЛДС:

$$W_{ext,kk} = U = -W_{int,kk} = \frac{1}{2} F_k \Delta_{kk}$$

**Теорема Клапейрона**

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ



Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил и ПЭУД через внутренние силовые факторы (напряжения) и деформации

$$\begin{aligned}
 & W_{ext, ik} = -W_{int, ik} = \\
 & = \int_V \left( \sigma_{x,i} \cdot \epsilon_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \epsilon_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \epsilon_{z,k} + \tau_{xy,i} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV \\
 & W_{ext, kk} = -W_{int, kk} = U = \\
 & = \frac{1}{2} \int_V \left( \sigma_{x,k} \cdot \epsilon_{x,k} + \sigma_{y,k} \cdot \epsilon_{y,k} + \sigma_{z,k} \cdot \epsilon_{z,k} + \tau_{xy,k} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,k} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,k} \cdot \gamma_{zx,k} \right) dV \\
 & dV = dx \cdot dy \cdot dz
 \end{aligned}$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных и действительных работ внешних и внутренних сил  
и ПЭУД через внутренние силовые факторы (напряжения) и деформации

$$W_{ext, ik} = -W_{int, ik} = \int_V (\sigma_{x,i} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,i} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \gamma_{zx,k}) dV$$

$$W_{ext, kk} = -W_{int, kk} = U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{x,k} \cdot \varepsilon_{x,k} + \sigma_{y,k} \cdot \varepsilon_{y,k} + \sigma_{z,k} \cdot \varepsilon_{z,k} + \tau_{xy,k} \cdot \gamma_{xy,k} + \tau_{yz,k} \cdot \gamma_{yz,k} + \tau_{zx,k} \cdot \gamma_{zx,k}) dV$$

Физические зависимости, связывающие деформации  $k$ -го состояния с напряжениями  
(для линейно деформируемого изотропного тела, с учётом температурной составляющей)

$$\varepsilon_{x,k} = [\sigma_{x,k} - \nu(\sigma_{y,k} + \sigma_{z,k})] / E + \alpha \cdot \Delta t; \quad \varepsilon_{z,k} = [\sigma_{z,k} - \nu(\sigma_{x,k} + \sigma_{y,k})] / E + \alpha \cdot \Delta t;$$

$$\gamma_{xy,k} = \tau_{xy,k} / G; \quad \gamma_{zx,k} = \tau_{zx,k} / G; \quad G = E / [2(1 + \nu)]$$

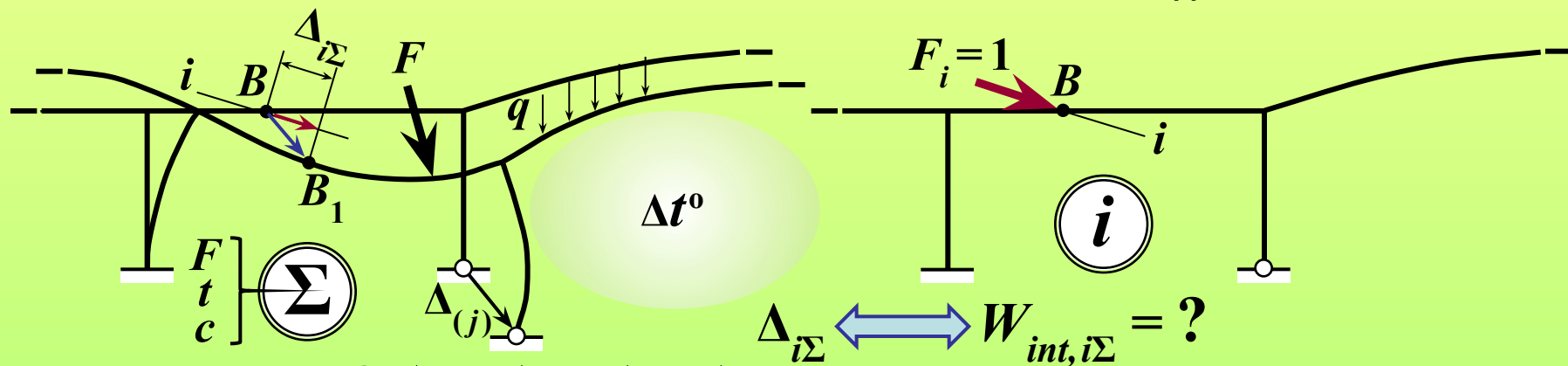
$$W_{ext, ik} = -W_{int, ik} = \int_V \frac{1}{2} \left\{ \sigma_{x,i} \cdot \sigma_{x,k} + \sigma_{y,i} \cdot \sigma_{y,k} + \sigma_{z,i} \cdot \sigma_{z,k} + \tau_{xy,i} \cdot \tau_{xy,k} + \tau_{yz,i} \cdot \tau_{yz,k} + \tau_{zx,i} \cdot \tau_{zx,k} + \sigma_{z,k} \cdot \sigma_{x,k} \right\} +$$

$$+ 2(1 + \nu) \left[ \tau_{xy,i} \tau_{xy,k} + \tau_{yz,i} \tau_{yz,k} + \tau_{zx,i} \tau_{zx,k} + E \alpha \cdot \Delta t (\sigma_{x,i} + \sigma_{y,i} + \sigma_{z,i}) \right] dV$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Вспомогательное единичное состояние



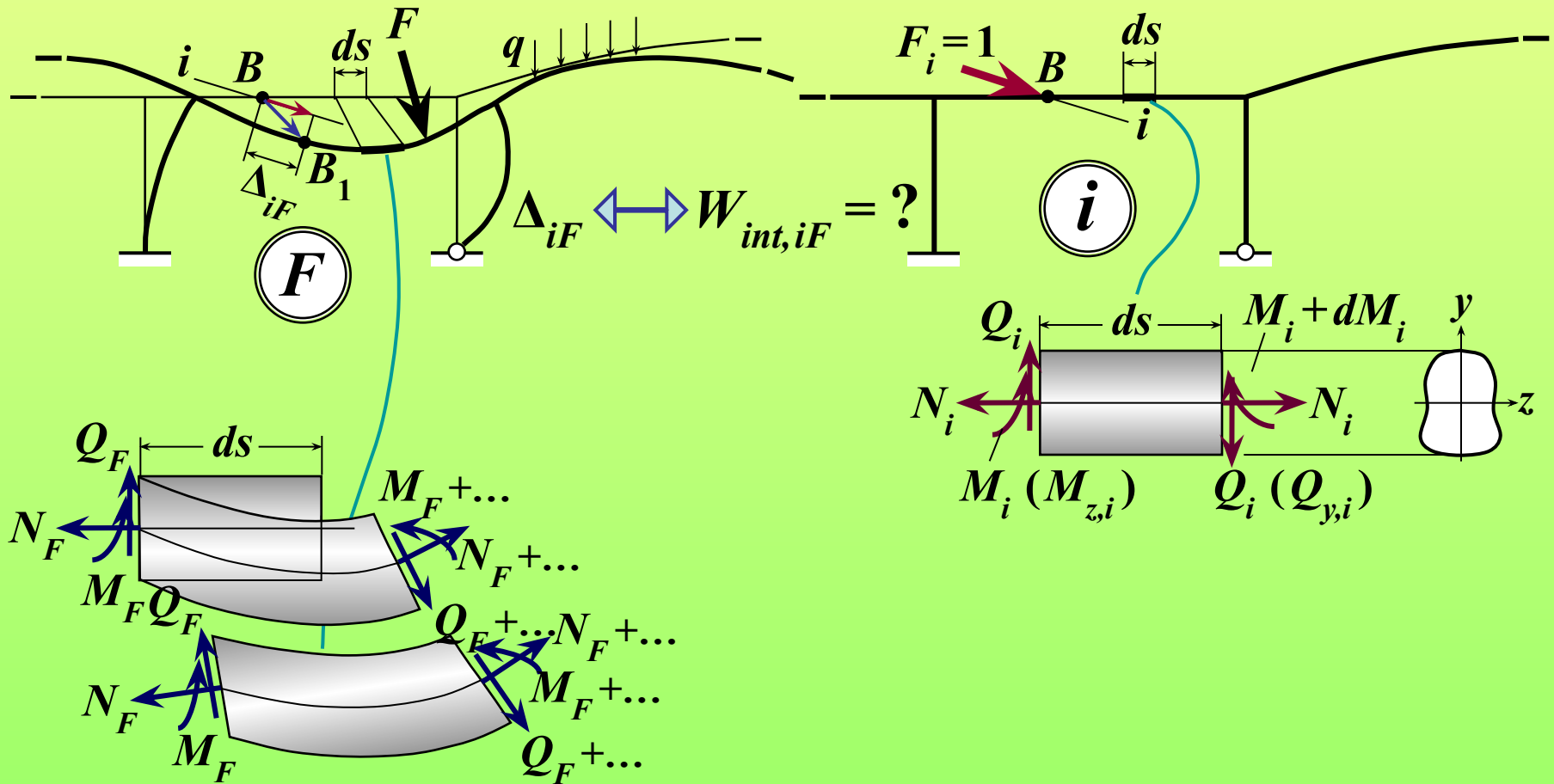
В случае ЛДС  $\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic}$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



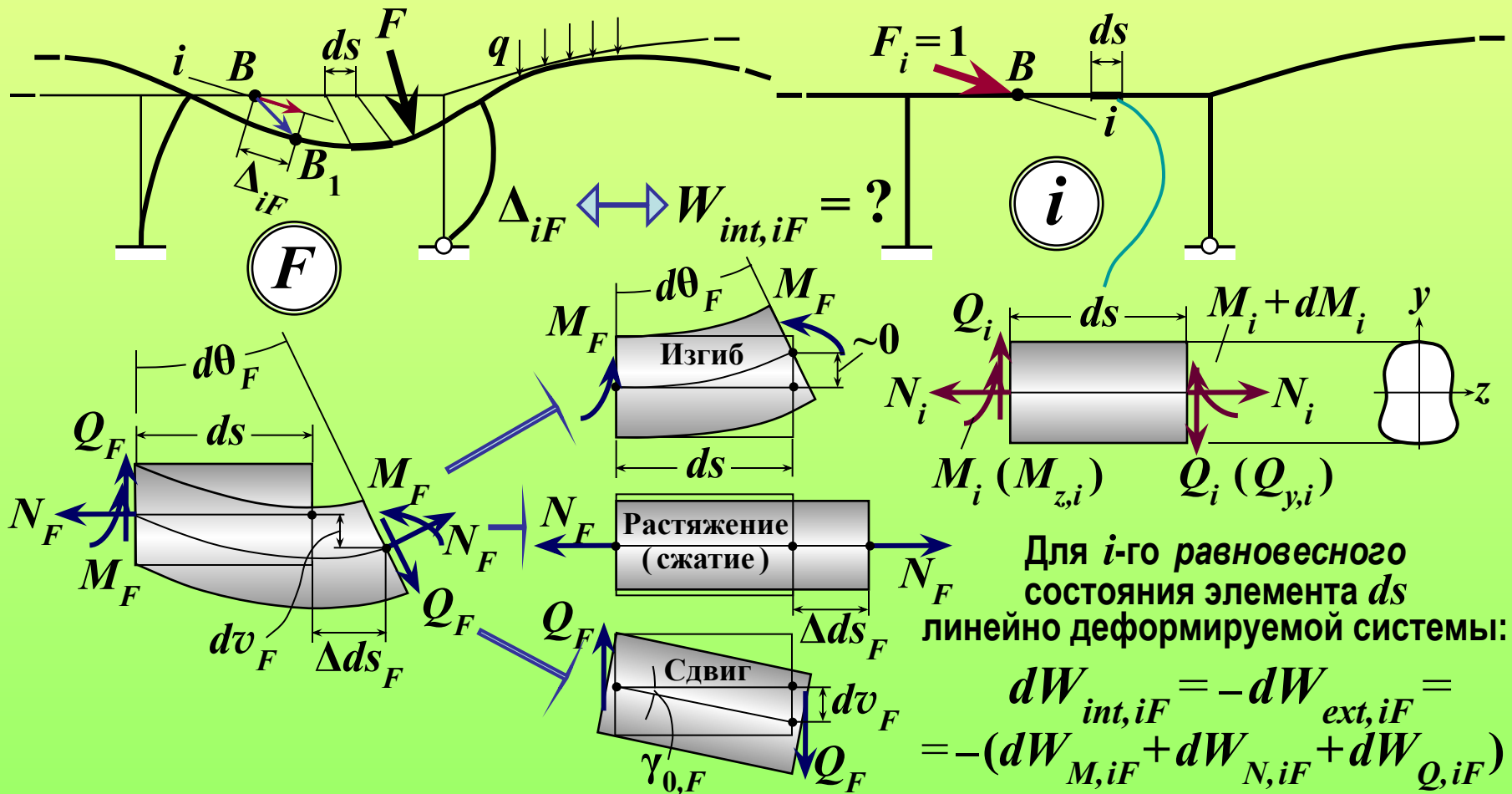


# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние

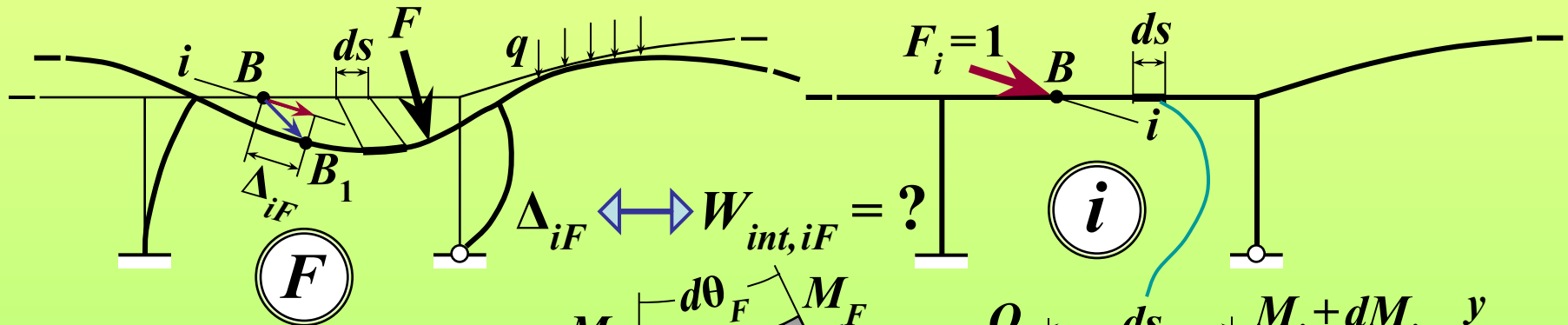


# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



$$dW_{M,iF} = M_i \cdot d\theta_F = M_i \cdot \rho_F \cdot ds$$

$$dW_{N,iF} = M_i \cdot \Delta u_{FF} = \frac{M_i \cdot \varepsilon_F \cdot ds}{EI}$$

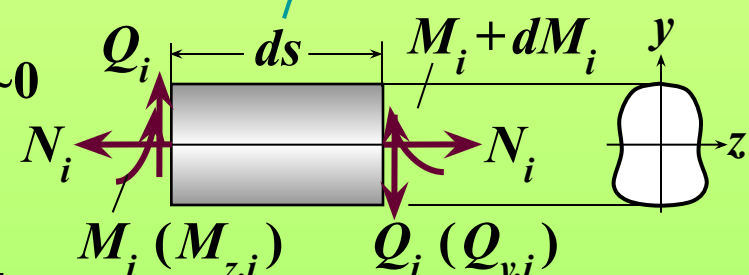
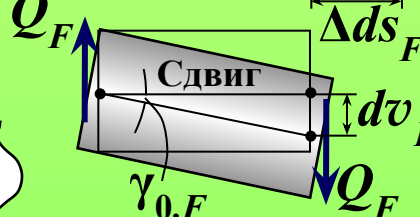
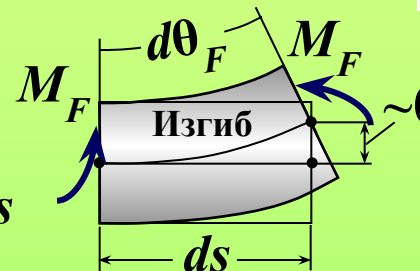
$$dW_{Q,iF} = Q_i \cdot dv_F = Q_i \cdot \gamma_{0,F} \cdot ds$$

По закону Гука при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно

$$\rho_F = M_F / EI; \quad \varepsilon_F = N_F / EA; \quad \gamma_{0,F} = \tau_{0,F} / G = (k \cdot Q_{0,F} / A) / G$$

$$dW_{k,\tau} = Q_i \cdot dv_{k,\tau} = k \cdot \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} \cdot ds$$

коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений по сечению



Для *i*-го равновесного состояния элемента *ds* линейно деформируемой системы:

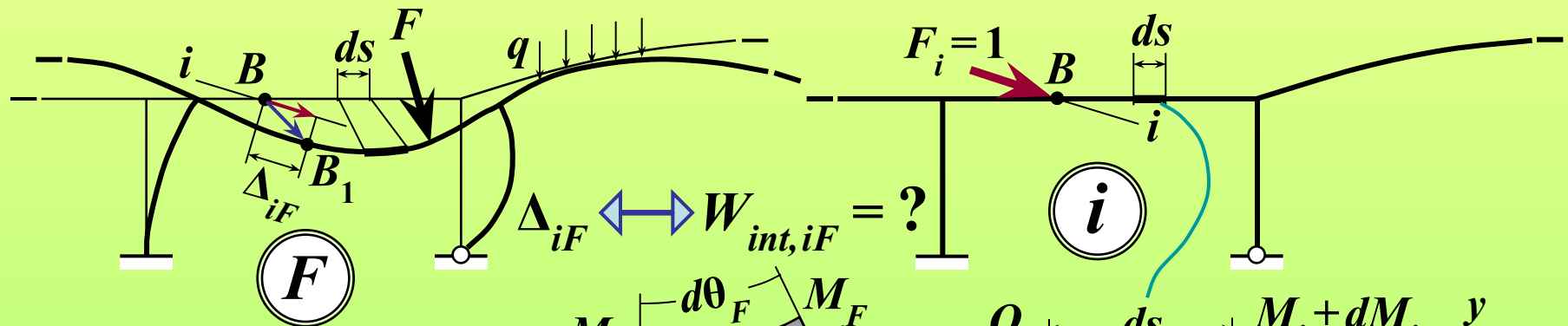
$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние

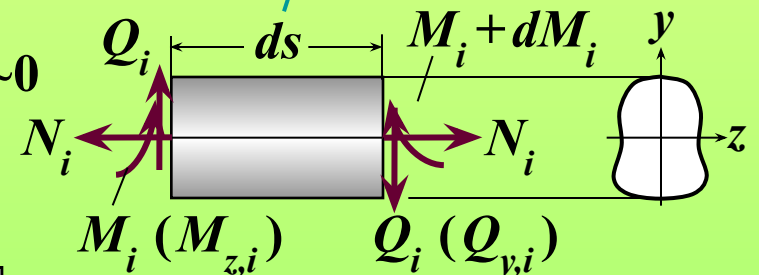
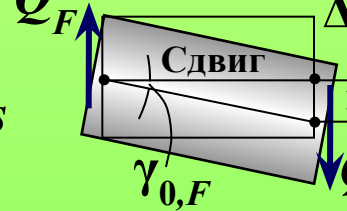
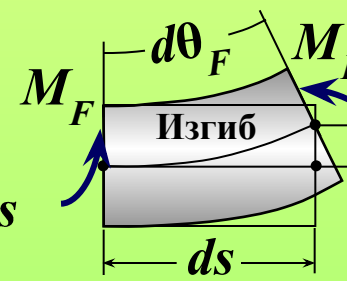


$$dW_{M,iF} = M_i \cdot d\theta_F = \frac{M_i \cdot M_F}{EI} ds$$

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF}$$

$$dW_{N,iF} = N_i \cdot \Delta ds_F = \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds + k_\tau \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} ds$$

$$dW_{Q,iF} = Q_i \cdot dv_F = k_\tau \frac{Q_i \cdot Q_F}{GA} ds$$



Для *i*-го равновесного состояния элемента *ds* линейно деформируемой системы:

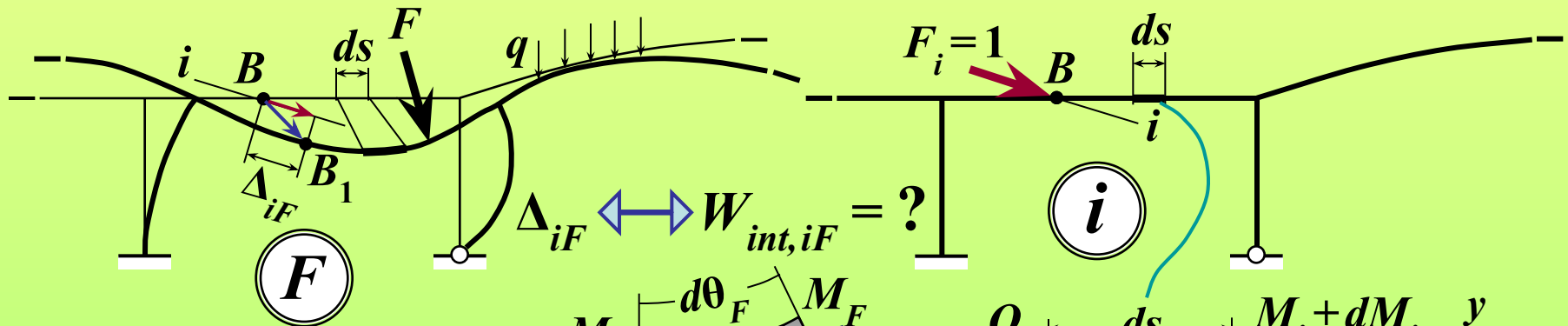
$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

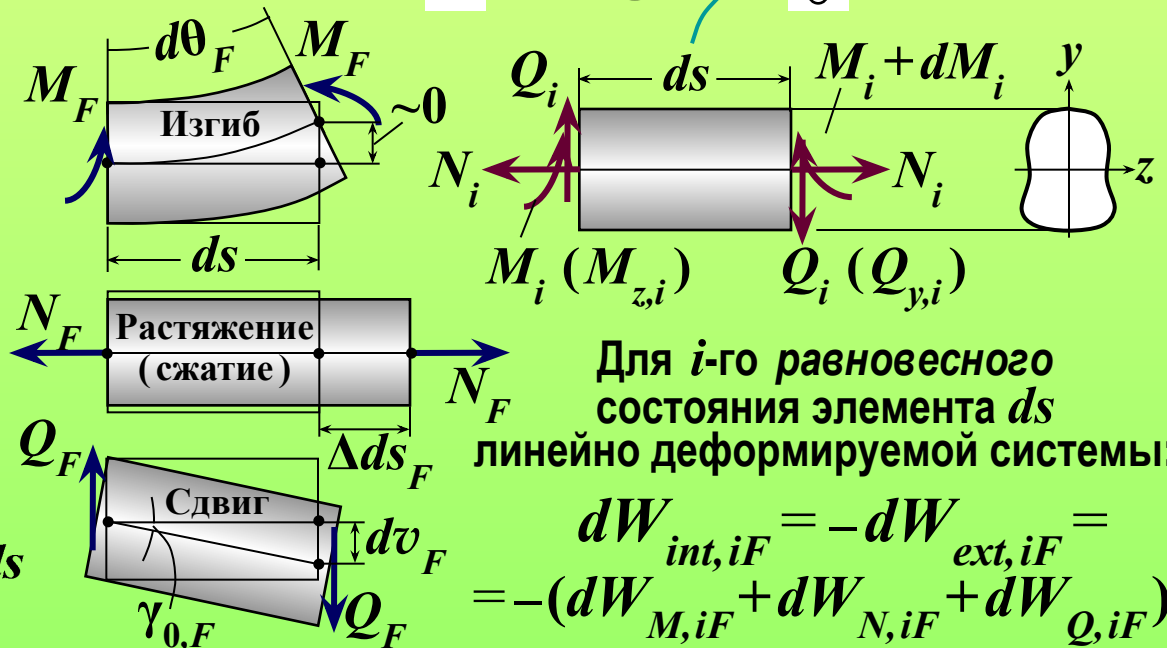
Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



Обобщение на случай пространственного сложного сопротивления стержня:

$$dW_{int,iF} \equiv dW_{ext,iF} \equiv \left( \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{EI} + \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds$$



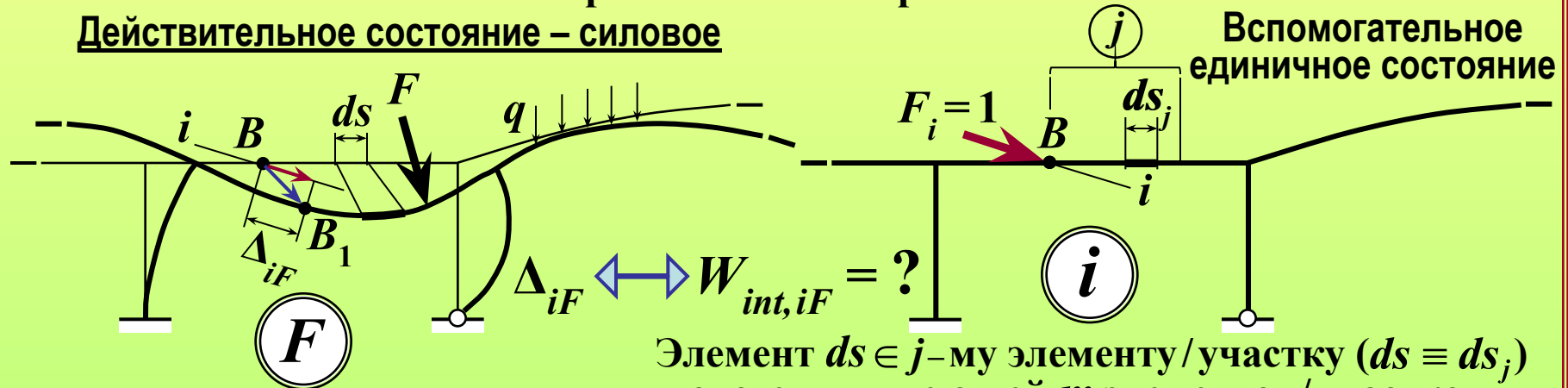
Для *i*-го равновесного состояния элемента *ds* линейно деформируемой системы:

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = -(dW_{M,iF} + dW_{N,iF} + dW_{Q,iF})$$

# ВОЗМОЖНАЯ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

Выражения возможных работ внешних и внутренних сил через внутренние силовые факторы в стержневых системах с прямолинейными элементами и стержнями малой кривизны

Действительное состояние – силовое



Вспомогательное  
единичное состояние

Элемент  $ds \in j$ -му элементу/участку ( $ds \equiv ds_j$ ) системы, имеющей  $m$  элементов/участков, тогда для всей системы:

Обобщение на случай пространственного сложного сопротивления стержня:

$$dW_{int,iF} = -dW_{ext,iF} = - \left( \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds$$

$$W_{int,iF} = -W_{ext,iF} = - \sum_{j=1}^m \int (dW_{ext,iF})_j = - \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \left( \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds_j$$

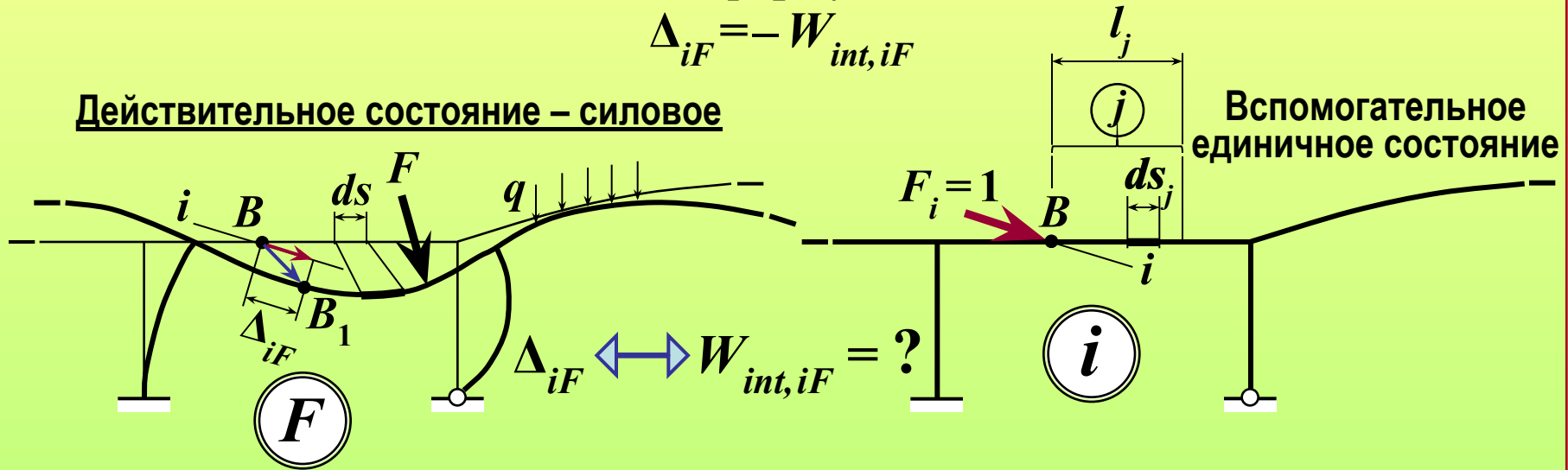
# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

По базовой формуле ММ-М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF}$$

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



$$\Delta_{iF} = -W_{int,iF} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \left( \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} + \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} + \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \right) ds_j =$$

$$-W_{ext,iF} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} (dW_{ext,iF})_j =$$

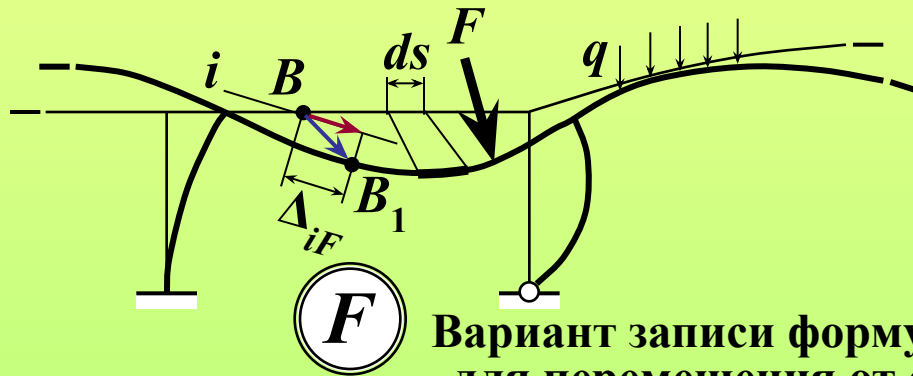
$$+ \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} + \frac{N_i \cdot N_F}{EA} + k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} + k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} \Big) ds_j$$

# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

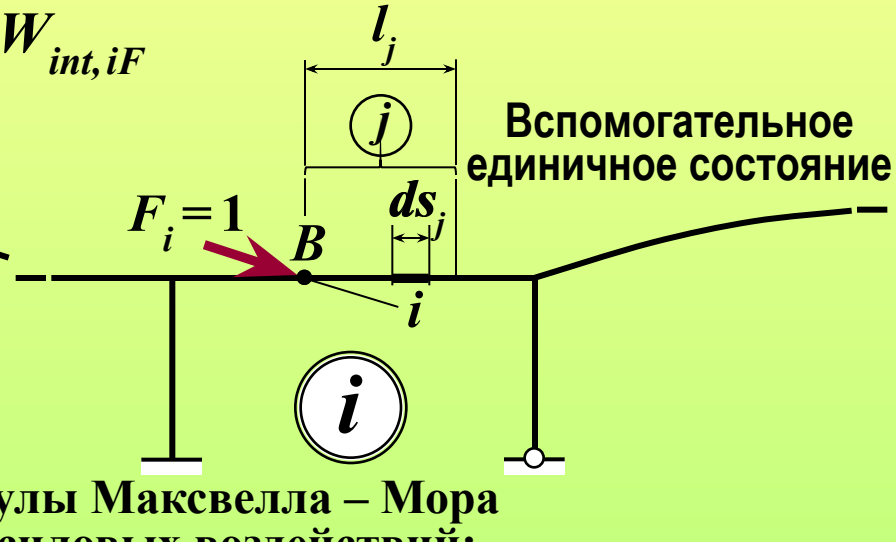
По базовой формуле ММ-М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int, iF}$$

Действительное состояние – силовое



Вспомогательное единичное состояние



Вариант записи формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_t}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} ds_j + \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_{i,j} \cdot N_{j,F}}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{k_{\tau z} GA} ds_j$$

В общем случае все величины в подынтегральном выражении – функции координаты сечения  $s_j$  (для прямолинейного стержня –  $x_j$ ):

$$M_{z,i} = M_{z,i}(s_j), M_{z,F} = M_{z,F}(s_j), \dots, N_F = N_F(s_j), \dots, Q_{z,F} = Q_{z,F}(s_j), EI_z = EI_z(s_j), \dots, GI_t = GI_t(s_j), EA = EA(s_j), GA = GA(s_j), \dots, k_{\tau z} = k_{\tau z}(s_j)$$



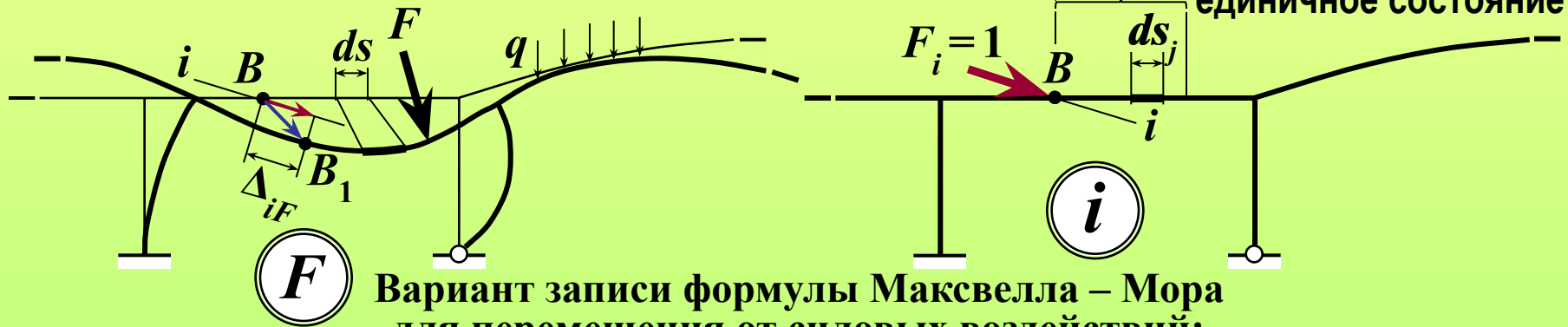
# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

По базовой формуле ММ-М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int, iF}$$

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



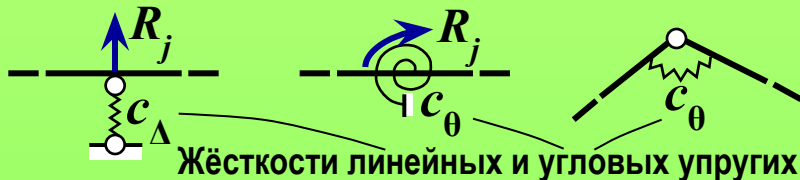
Вариант записи формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{j=1}^{m_{M_z}} \int_{l_j} \frac{M_{z,i} \cdot M_{z,F}}{EI_z} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_y}} \int_{l_j} \frac{M_{y,i} \cdot M_{y,F}}{EI_y} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{M_t}} \int_{l_j} \frac{M_{t,i} \cdot M_{t,F}}{GI_t} ds_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_N} \int_{l_j} \frac{N_i \cdot N_F}{EA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_y}} \int_{l_j} k_{\tau y} \frac{Q_{y,i} \cdot Q_{y,F}}{GA} ds_j + \sum_{j=1}^{m_{Q_z}} \int_{l_j} k_{\tau z} \frac{Q_{z,i} \cdot Q_{z,F}}{GA} ds_j +$$

Учёт деформируемых (нежестких) упругоподатливых связей в системе:

$$+ \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$



Жёсткости линейных и угловых упругих связей

Закон Гука для упругих связей:

$$R_j = c_j \cdot \Delta_j$$

$u$  – суммарное число внешних и внутренних упругих связей



# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

По базовой формуле ММ-М:

$$\Delta_{iF} = -W_{int, iF}$$

Действительное состояние – силовое

Вспомогательное единичное состояние



Краткая запись формулы Максвелла – Мора для перемещения от силовых воздействий:

$$\Delta_{iF} = \sum_{\text{по } S} \sum_{j=1}^{m_S} \int_{l_j} \frac{S_i \cdot S_F}{C_S} ds_j + \sum_{j=1}^u \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{c_j}$$

$S \dots$  – обобщённое обозначение внутреннего силового фактора:

$$S \dots \begin{cases} M_{z, \dots} \\ M_{y, \dots} \\ N^{t, \dots} \\ Q_{y, \dots} \\ Q_{z, \dots} \end{cases}$$

$C_S$  – обобщённое обозначение жёсткости сечения при деформации, соответствующей силовому фактору  $S$ :

$$C_S \begin{cases} EI_z \\ EI_y \\ GI_t \\ EA \\ GA/k_{\tau y} \\ GA/k_{\tau z} \end{cases}$$

$$\boxtimes = i \vee F$$

# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

## Приложение

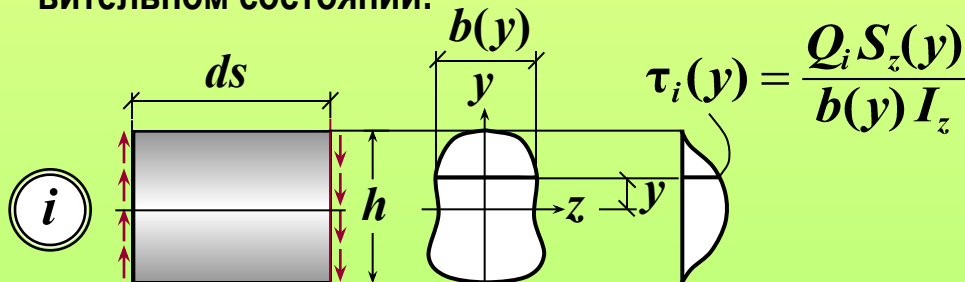
К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

### 1. Формула для коэффициента $k$

Формула выводится путём сопоставления выражений возможных работ

по двум расчётным моделям элемента  $ds$ :

а) с **фактическими** касательными напряжениями  $\tau_i(y)$  в концевых сечениях элемента  $ds$  во вспомогательном  $i$ -ом единичном состоянии и **фактическими** деформациями сдвига  $\gamma_F(y)$  в действительном состоянии:



$$\tau_i(y) = \frac{Q_i S_z(y)}{b(y) I_z}$$

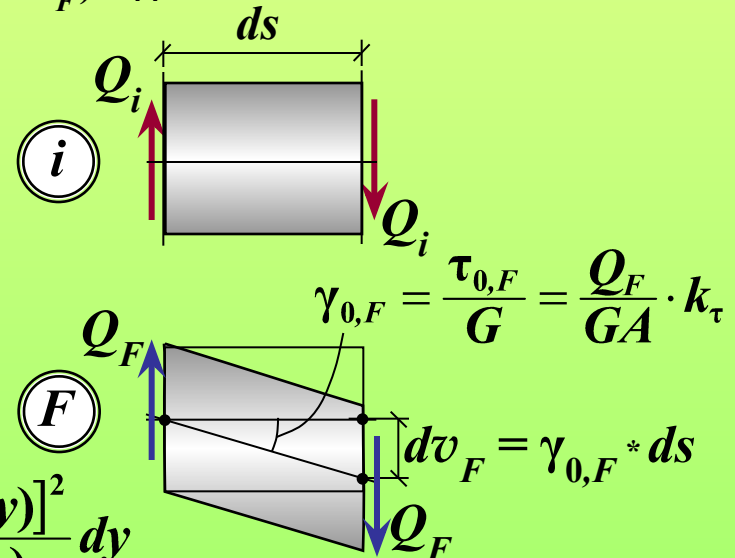
$$\gamma_F(y) = \frac{\tau_F(y)}{G} = \frac{Q_F}{G} \cdot \frac{S_z(y)}{b(y) I_z}$$

По закону Гука при сдвиге

$$dW_{ext,iF}^{(a)} = \int \tau_i(y) \cdot \gamma_F(y) \cdot b(y) \cdot ds \cdot dy$$

$$= ds \int_h \frac{Q_i S_z(y)}{b(y) I_z} \cdot \frac{Q_F S_z(y)}{G b(y) I_z} \cdot b(y) \cdot dy \cdot ds = \frac{Q_i Q_F}{G I_z^2} \int_h \frac{[S_z(y)]^2}{b(y)} dy \cdot ds$$

б) с **обобщёнными силами** (поперечными силами  $Q_i$ ) в концевых сечениях элемента  $ds$  в  $i$ -ом единичном состоянии и соответствующими **обобщёнными перемещениями** (абсолютным сдвигом  $dv_F$ ) в действительном состоянии:



$$\gamma_{0,F} = \frac{\tau_{0,F}}{G} = \frac{Q_F}{GA} \cdot k_\tau$$

$$dv_F = \gamma_{0,F} \cdot ds$$

$$dW_{ext,iF}^{(6)} = Q_i \cdot dv_F = Q_i \cdot \gamma_{0,F} \cdot ds =$$

$$dW_{ext,iF}^{(6)} = \frac{Q_i Q_F}{G A} k_\tau ds$$

# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА - МОРА

## Приложение

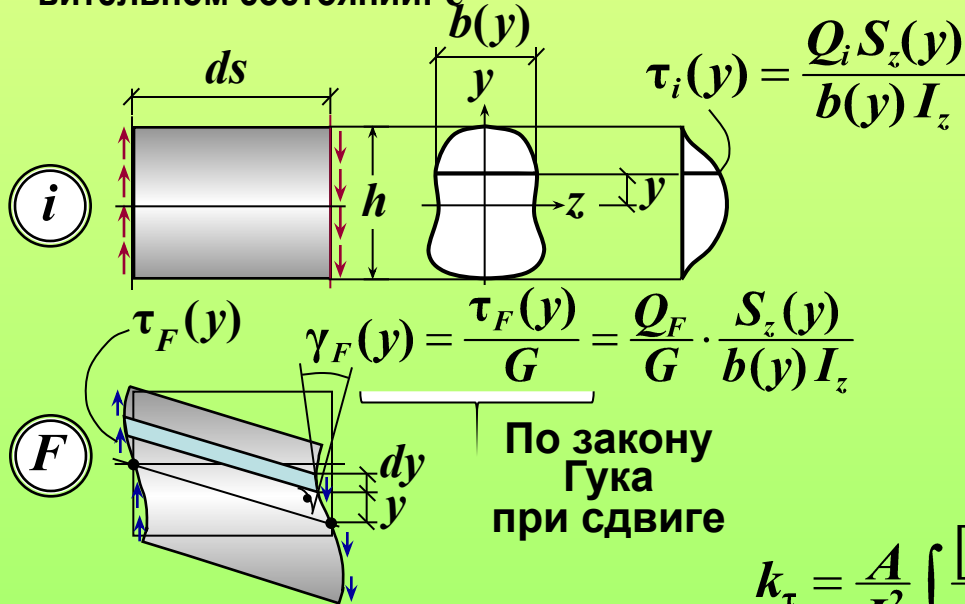
К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

### 1. Формула для коэффициента $k$

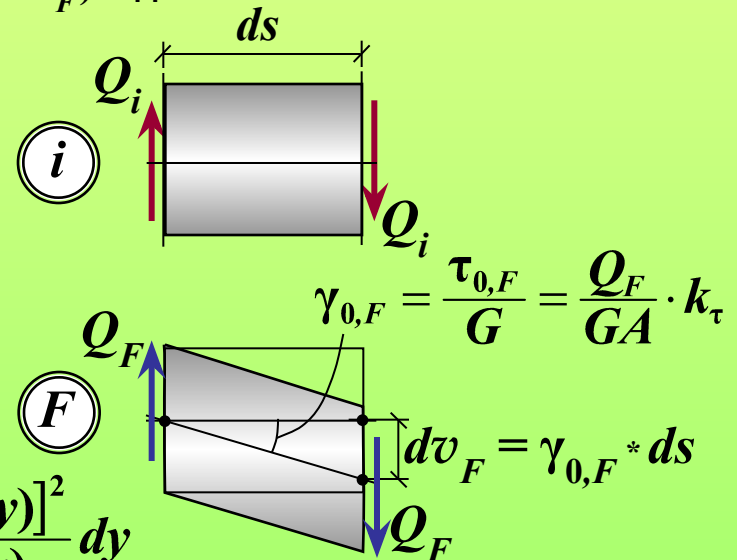
Формула выводится путем сопоставления выражений возможных работ

по двум расчётным моделям элемента  $ds$ :

а) с **фактическими** касательными напряжениями  $\tau_i(y)$  в концевых сечениях элемента  $ds$  во вспомогательном  $i$ -ом единичном состоянии и **фактическими** деформациями сдвига  $\gamma_F(y)$  в действительном состоянии:



б) с **обобщёнными силами** (поперечными силами  $Q_i$ ) в концевых сечениях элемента  $ds$  в  $i$ -ом единичном состоянии и соответствующими **обобщёнными перемещениями** (абсолютным сдвигом  $dv_F$ ) в действительном состоянии:



$$k_\tau = \frac{A}{I_z^2} \int_{-h}^h \frac{[S_z(y)]^2}{b(y)} dy$$

Значения коэффициента  $k_\tau$  для некоторых видов сечений:

$\square k_\tau = 6/5$

$\bigcirc k_\tau = 10/9$

$\Gamma k_\tau \approx A/A_w$

# ВЫРАЖЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПО МЕТОДУ МАКСВЕЛЛА – МОРА

## Приложение

К вопросу об учёте деформации сдвига при определении перемещений

### 2. Оценка влияния сдвига на перемещения от силовых воздействий

Составляющая перемещения  $\Delta_{iF}$ , обусловленная деформацией сдвига, –  $\Delta_{iF,Q}$ ; в отношении к составляющей  $\Delta_{iF,M}$  от изгиба:  $\Delta_{iF,Q}/\Delta_{iF,M} = \alpha_Q$

Для  $j$ -го участка/элемента постоянного сечения:

$$\alpha_Q^{(j)} = \frac{E_j}{G_j} \cdot k_\tau^{(j)} \cdot [\alpha_r^{(j)}]^2 \cdot \left(\frac{h_j}{l_j}\right)^2 \cdot \beta_S^{(j)},$$

где  $\alpha_r^{(j)} = r_j / h_j < 0,5$  – относительный радиус инерции сечения;  $\beta_S^{(j)} = \frac{l_j^2 \int Q_i Q_F ds_j}{\int_{l_j} M_i M_F ds_j}$

**Признаки необходимости учёта деформации сдвига при определении перемещений стержневых систем:**

- сечение – тонкостенное ( $k_\tau > 2$ );
- материал – относительно низко модульный при сдвиге ( $E/G > 3 \dots 4$ );
- элемент достаточно массивный, «короткий» ( $h/l > 1/8$ );
- нагрузки таковы, что вызывают значительные поперечные силы при сравнительно небольших изгибающих моментах (ориентировочно: средние на грузовом участке  $|M/Q| < \sim h$ ).

**Подробнее см.:** Себешев В.Г. Особенности работы статически неопределимых систем и регулирование усилий в конструкциях: учебное пособие. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2009. – 164 с.

# Контрольные вопросы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 29»)*

1. Как в общем виде обозначаются перемещения? Какой смысл имеют индексы в этом обозначении? [\(2\)](#)
2. Что такое собственное перемещение? [\(2\)](#)
3. Какие индексы используются для обозначения перемещений от силовых, температурных, кинематических и комбинированных воздействий? [\(3\)](#)
4. Какие перемещения называются единичными? [\(4\)](#)
4. Какова основная идея метода Максвелла–Мора определения перемещений деформируемых систем? Почему этот метод также называется методом единичных вспомогательных нагрузок? [\(5\)](#)
5. Правило задания вспомогательного единичного воздействия. Каков кинематический смысл этого воздействия? [\(6\)](#)
6. Типовые случаи вспомогательных единичных состояний в методе Максвелла–Мора. [\(7\)](#)
7. Какой принцип механики лежит в основе метода Максвелла–Мора? [\(8\)](#)
8. Через какие величины выражается искомое перемещение по базовой формуле метода Максвелла–Мора? [\(8\)](#)
9. Что такое возможная работа внешних или внутренних сил? [\(9\)](#)
10. Какая работа внешних или внутренних сил называется действительной? [\(9\)](#)
11. Что называется потенциальной энергией деформации системы? [\(9\)](#)
12. Как связаны возможные работы внешних и внутренних сил [\(10\)](#) 12. Как связаны возможные работы внешних и внутренних сил (10), их действительные работы и потенциальная энергия упругой деформации (ПЭУД)? [\(12\)](#)

\* ) Только в режиме «Показ слайдов»

# Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 30»)

13. Как выражаются возможные и действительные работы внешних и внутренних сил и ПЭУД через обобщённые нагрузки и обобщённые перемещения? Частный случай – линейно деформируемые системы (теорема Клапейрона). [\(10 – 12\)](#)
14. Какой приём используется для получения выражения возможной работы через внутренние силовые факторы? [\(16\)](#)
15. Как деформации действительного *силового* состояния выражаются через внутренние силовые факторы? [\(18\)](#)
16. Каков смысл величин  $EI$ ,  $EA$ ,  $GI_t$ ,  $GA/k_t$ , входящих в формулу Максвелла–Мора? [\(18\)](#)
17. Варианты развёрнутой записи формулы Максвелла–Мора для перемещения от силовых воздействий. [\(22, 23\)](#)
18. Какими слагаемыми в формуле Максвелла–Мора учитываются разные виды упругих деформаций элементов (изгиб, растяжение/сжатие, сдвиг, кручение)? [\(24\)](#)
19. Что учитывает коэффициент  $k_t$  в слагаемом формулы Максвелла – Мора, отражающем влияние сдвига? [\(18\)](#) влияние сдвига? (18) [\(27\)](#)
20. Как учитываются в формуле Максвелла–Мора деформации упругоподатливых связей системы? [\(24\)](#)
21. Краткая обобщённая запись формулы Максвелла–Мора для перемещения от силового воздействия. [\(25\)](#)
22. Какие величины обобщённо обозначаются как  $S_i$  и  $S_F$  в краткой записи формулы Максвелла–Мора? То же,  $C_S$ ? [\(25\)](#)

\*) Только в режиме «Показ слайдов»