



# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

**МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ  
В ДЕФОРМИРУЕМЫХ  
СИСТЕМАХ**

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)  
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов  
 (внутренние силовые факторы)

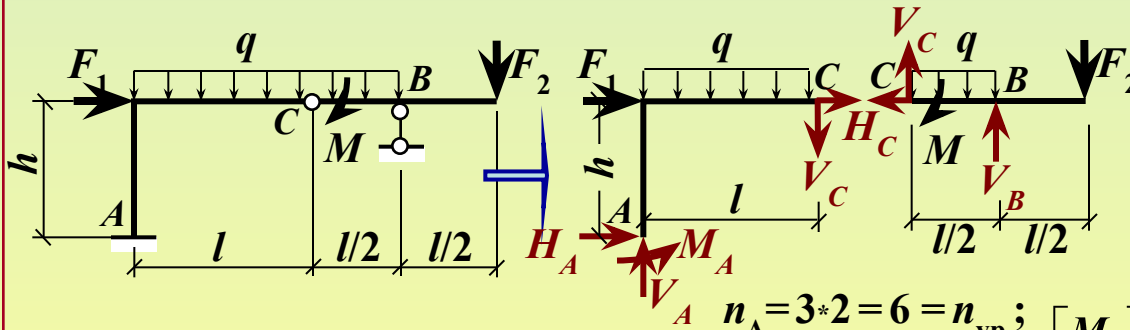
Методы определения силовых факторов ↗ статический  
 ↗ кинематический  
 ↘ энергетический

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы:  $A * S + B_F = 0$

↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента  
 ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)



$S$  – вектор искомых усилий;  
 $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных  $S$  в уравнениях равновесия;  
 $B_F$  – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

$n_{\Delta} = 3 * 2 = 6 = n_{ур}$ ;  
 $n_c = n_s = 6$   
 Вектор искомых реакций связей:  $S =$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$$

Для системы в целом:  
 – число искомых усилий  $n_S = n_c$ ;  
 – количество уравнений  $n_{ур} = n_{\Delta}$ .  
 В случае статически определимой системы ( $W=0$ )  $n_{\Delta} = n_c \Rightarrow n_{ур} = n_S$

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)  
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов  
 (внутренние силовые факторы)

Методы определения  
 силовых факторов

- ↗ статический
- кинематический
- ↘ энергетический

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы:  $A \cdot S + B_F = 0$

- ↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента
- ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

Уравнения равновесия:

$$\sum M_A^{(AC)} = 0 \quad \sum V_C^{(AC)} = 0$$

$$\sum H_A^{(AC)} + H_C^{(AC)} + F_1 \cdot h - F_1 \cdot h - ql^2/2 = 0$$

$$\sum V_A^{(AC)} - V_C^{(AC)} - q \cdot 0 = 0$$

$$\sum M_A^{(CB)} = 0 \quad \sum V_B^{(CB)} = 0$$

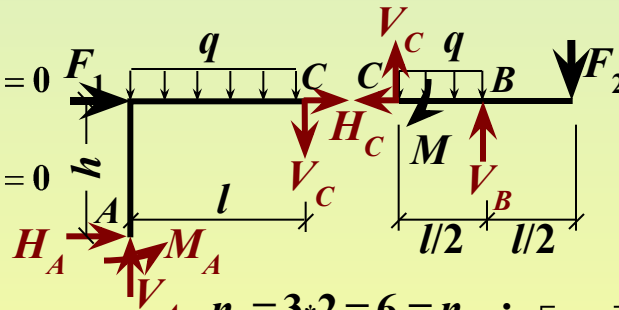
$$\sum H_B^{(CB)} + H_C^{(CB)} + F_2 \cdot l - F_2 \cdot l - ql^2/8 = 0$$

$$\sum V_B^{(CB)} + V_C^{(CB)} - F_2 - q \cdot l/2 = 0$$

$$\sum H_C^{(CB)} = 0$$

$$\sum y^{(CB)} = 0$$

$$\sum x^{(CB)} = 0$$



$n_{\Delta} = 3 \cdot 2 = 6 = n_{ур}$ ;  
 $n_c = n_s = 6$   
 Вектор искомых реакций связей:  $S =$

$$\begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$$

- $S$  – вектор искомых усилий;
- $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных  $S$  в уравнениях равновесия;
- $B_F$  – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

Для системы в целом:

- число искомых усилий  $n_S = n_c$ ;
  - количество уравнений  $n_{ур} = n_{\Delta}$ .
- В случае статически определимой системы ( $W=0$ )  $n_{\Delta} = n_c \Rightarrow n_{ур} = n_S$

Силловые факторы – реакции связей ↗ внешних (опорные реакции)  
 ↘ внутренних ↗ между дисками

В сечениях элементов  
 (внутренние силовые факторы)

Методы определения силовых факторов ↗ статический  
 ↗ кинематический  
 ↘ энергетический

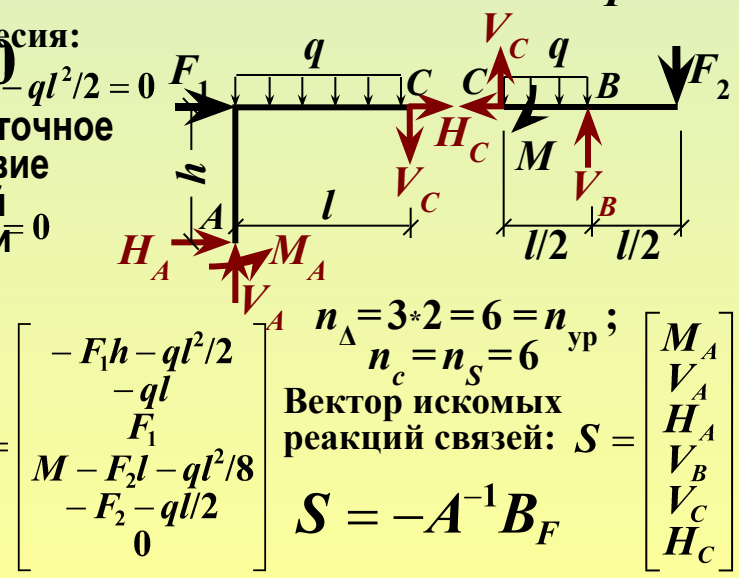
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы:  $A \cdot S + B_F = 0$  ↗ дифференциальные уравнения для бесконечно малого элемента  
 ↘ линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

Уравнения равновесия:  
 $Det(A) \neq 0$   
 Необходимое и достаточное статическое условие геометрической неизменяемости системы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -l & -h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & l/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$B_F = \begin{bmatrix} -F_1 h - ql^2/2 \\ -ql \\ F_1 \\ M - F_2 l - ql^2/8 \\ -F_2 - ql/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$n_{\Delta} = 3 \cdot 2 = 6 = n_{yp}$ ;  
 $n_c = n_s = 6$   
 Вектор искомых реакций связей:  $S = \begin{bmatrix} M_A \\ V_A \\ H_A \\ V_B \\ V_C \\ H_C \end{bmatrix}$   
 $S = -A^{-1} B_F$

$S$  – вектор искомых усилий;  
 $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных  $S$  в уравнениях равновесия;  
 $B_F$  – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

Для системы в целом:  
 – число искомых усилий  $n_S = n_c$ ;  
 – количество уравнений  $n_{yp} = n_{\Delta}$ .  
 В случае статически определимой системы ( $W=0$ )  $n_{\Delta} = n_c \Leftrightarrow n_{yp} = n_S$



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Сущность статического метода – непосредственное использование уравнений равновесия системы в целом и/или её частей.

Уравнения равновесия в случае линейно деформируемой системы:  $A \cdot S + B_F = 0$

линейные алгебраические уравнения для системы элементов конечных размеров (дискретной системы)

$S$  – вектор искомых усилий;  
 $A$  – матрица коэффициентов при неизвестных  $S$  в уравнениях равновесия;  
 $B_F$  – вектор «грузовых» членов уравнений равновесия (от заданных нагрузок).

Универсальная процедура формирования системы уравнений равновесия (концепция конечных элементов)

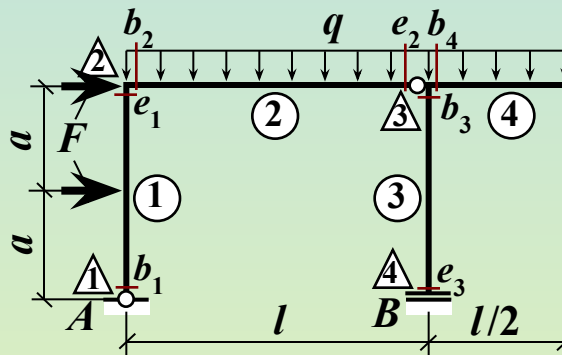
1. Разделение системы на *элементы* и *узлы* сечениями по концам стержневых элементов (концевыми сечениями).
2. Запись уравнений:
  - **1-я группа** – уравнения равновесия *элементов* в локальных (собственных) осях координат – стандартная процедура;
  - **2-я группа** – уравнения равновесия *узлов* (включая опорные) в общей (глобальной) системе координат;
  - **3-я группа** – статические характеристики связей в узлах.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Универсальная процедура формирования системы уравнений равновесия  $A \cdot S + B_F = 0$  (концепция конечных элементов)

1. Разделение системы на элементы и узлы сечениями по концам стержневых элементов (концевыми сечениями).
2. Запись уравнений:
  - 1-я группа – уравнения равновесия элементов в локальных (собственных) осях координат – стандартная процедура;
  - 2-я группа – уравнения равновесия узлов (включая опорные) в общей (глобальной) системе координат;
  - 3-я группа – статические характеристики связей в узлах.

Пример



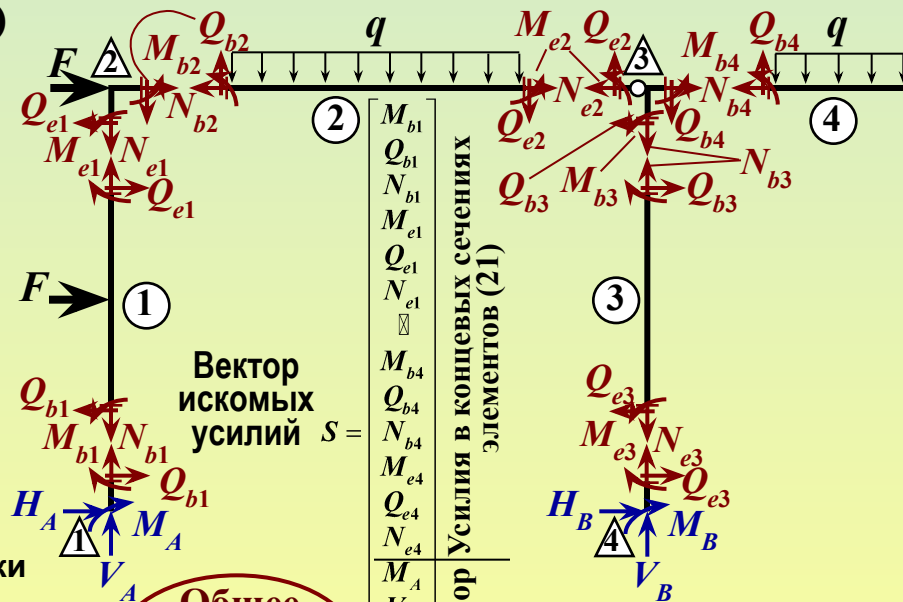
Уравнения 1-й группы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_{bj}^{(j)} = 0 \\ \sum x_j^{(j)} = 0 \\ \sum y_j^{(j)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{bj} - M_{ej} + Q_{ej} \cdot l_j + M_{bj}^{(Fj)} = 0 \\ -N_{bj} + N_{ej} + X^{(Fj)} = 0 \\ Q_{bj} - Q_{ej} + Y^{(Fj)} = 0 \end{array} \right.$$

$j = 1, 2, 3, 4$   
Количество уравнений 1-й группы – 12

Уравнения 2-й группы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_t^{(t)} = 0 \quad t = 1, 2, 3, 4 \\ \sum x^{(t)} = 0 \\ \sum y^{(t)} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Количество уравнений} \\ \text{2-й группы} - 12 \end{array} \right.$$



Общее число уравнений 27  
 $n_{ур} = n_S$

Усилия в концевых сечениях элементов (21)  
Реакции опор (6)

Уравнения 3-й группы (3):

$$\begin{array}{l} M_A = 0 \\ H_B = 0 \\ M_{e2} = 0 \end{array}$$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В случае *статически неопределимой* системы

$$W < 0 \quad \longrightarrow \quad n_{\Delta} < n_c \quad \longrightarrow \quad n_{yp} < n_S$$

Недостающие уравнения в количестве  $n_c - n_{\Delta} = n_{л.с.}$  – геометрические:

$A_D * \Delta + D = 0$  – условия совместности перемещений  
(например, описание перемещений по направлениям лишних связей)

Объединённая система уравнений: 
$$\left[ \begin{array}{l} A^* S + B_F = 0 \\ A_D^* \Delta + D = 0 \end{array} \right]$$

Из физических зависимостей (закон Гука и др.):  
 $\Delta = \Delta(S)$  – выражения перемещений через усилия

Разрешающие уравнения в усилиях:  $A_0^* S + B_0 = 0$

Необходимое и достаточное аналитическое условие  
геометрической неизменяемости системы:  $Det(A_0) \neq 0$

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) КИНЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

**В основе метода – принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)\*:**

*если механическая система находится в равновесии, то сумма работ внешних сил, приложенных к системе, и соответствующих им внутренних сил на возможных (виртуальных) перемещениях равна нулю:*

$$W_{ext} + W_{int} = 0$$

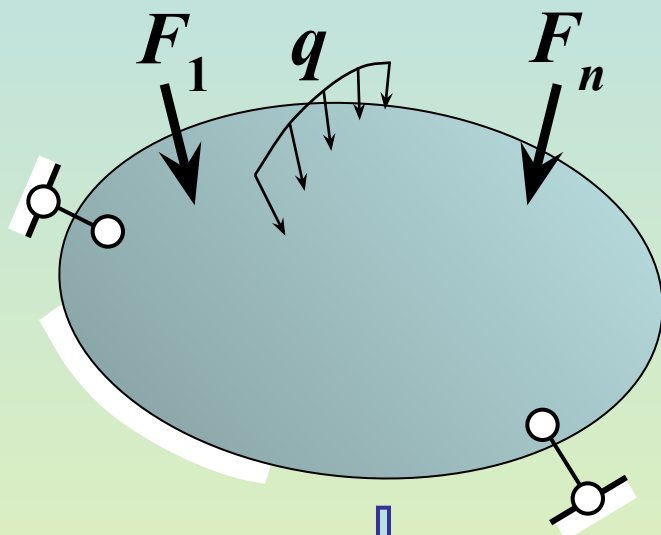
---

\*J.L. Lagrange (1788)



## **Возможные (виртуальные) перемещения –**

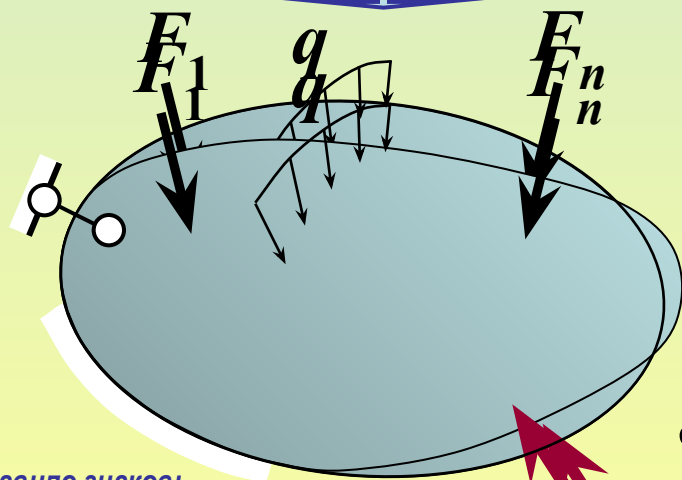
- а) бесконечно малые** ( для *линейно деформируемых систем* – конечные, но малые в сравнении с габаритами системы );
- б) не противоречащие условиям совместности деформаций ( перемещений ) и кинематическим граничным условиям ( условиям закрепления );**
- в) отсчитываемые от исследуемого положения равновесия.**



$F_1 = \alpha_1 F, \dots, F_n = \alpha_n F, q = \xi F$   
 $F$  – обобщённая нагрузка (параметр группы *активных внешних сил*)

**Обязательная процедура – выявление** подлежащего определению силового фактора  $S$  (реакции связи):  
 связь удаляется, её реакция  $S$  переходит в категорию *внешних сил*.

Системе с удалённой связью, сохраняющей равновесие после приложения реакции  $S$ , задаётся *возможное (виртуальное) перемещение*.



Возможная работа внешних сил  $W_{ext}$  складывается из работ нагрузки и реакции связи  $S$ :  $W_{ext} = W_F + W_S$ ,

где  $W_F = F * \delta_F$ ,  $W_S = S * \delta_S$ ,

$\delta_F$  – обобщённое (групповое) перемещение, соответствующее обобщённой нагрузке  $F$ ;  
 $\delta_S$  – перемещение по направлению удалённой связи (по направлению реакции  $S$ ).

**Правило знаков:**

перемещения  $\delta_F$  и  $\delta_S$  положительные, если совпадают по направлению соответственно с  $F$  и  $S$  (возможная работа  $F$  на  $\delta_F$  или  $S$  на  $\delta_S$  положительная).

# Алгоритм определения реакции связи кинематическим методом

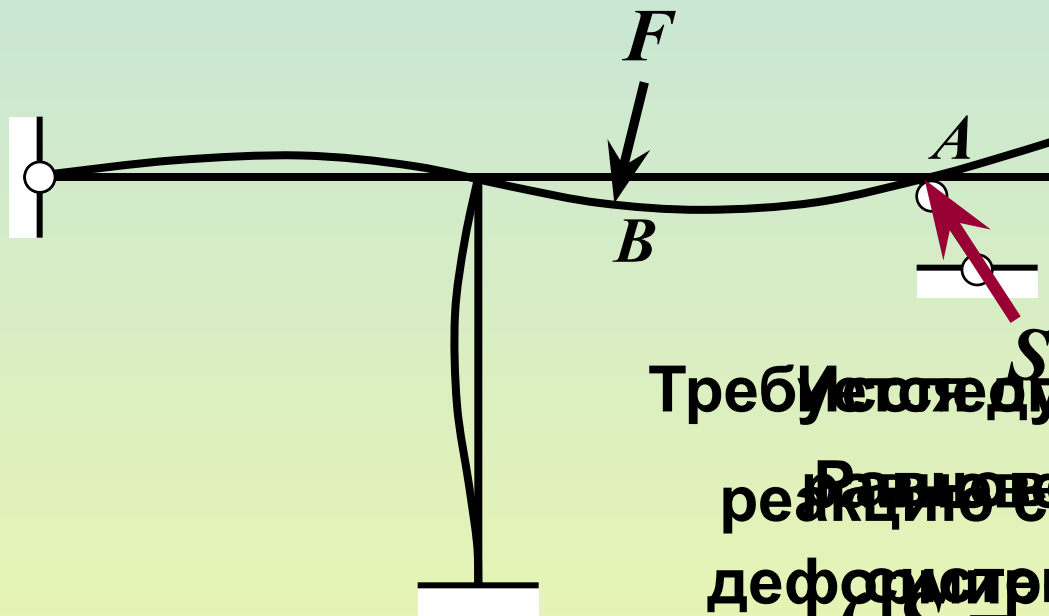
1. В системе, находящейся в равновесном деформированном состоянии при заданной нагрузке, удаляется связь, реакцию которой  $S$  требуется определить. Взамен удалённой связи прикладывается её реакция  $S$ , обеспечивающая сохранение неизменным состояния равновесия системы.
2. Системе с удалённой связью, находящейся по-прежнему в равновесном деформированном состоянии при действующей нагрузке и реакции  $S$ , задаётся возможное (виртуальное) перемещение.
3. Определяются (с точностью до общего неопределённого множителя  $\delta_0$ ) перемещения  $\delta_F$  и  $\delta_S$  – соответственно по направлениям заданной нагрузки  $F$  и искомой реакции  $S$ .
4. Из уравнения возможных работ  $W_{ext} + W_{int} = 0$  определяется искомый силовой фактор  $S$  (реакция связи):

$$S = - \frac{F \cdot \delta_F + W_{int}}{\delta_S}$$

# Алгоритм определения реакции связи кинематическим методом

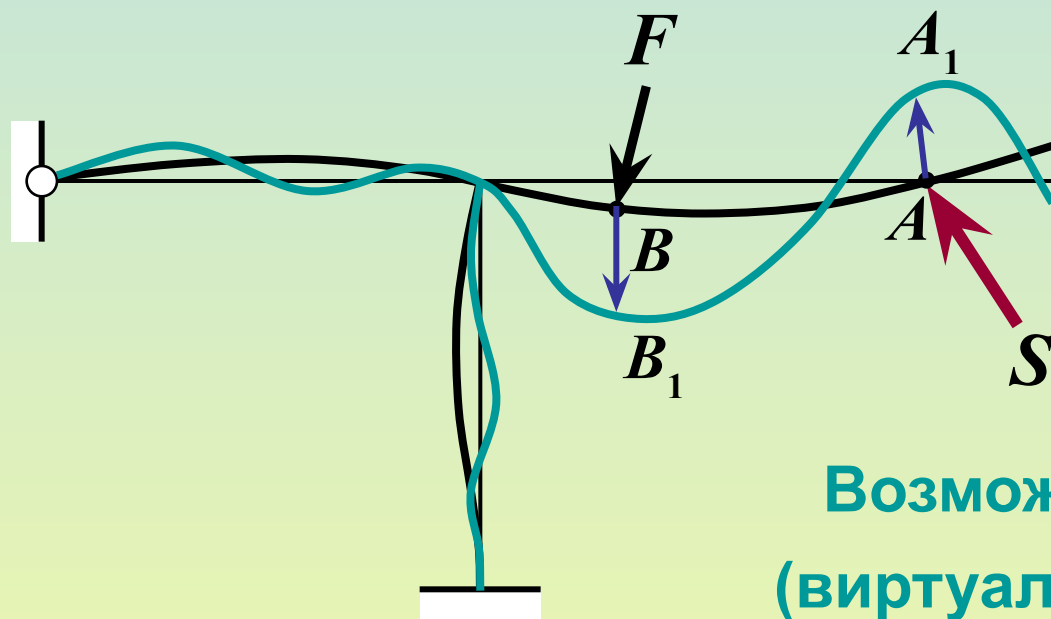
1. В системе, находящейся в равновесном деформированном состоянии при заданной нагрузке, удаляется связь, реакцию которой  $S$  требуется определить. Взамен удалённой связи прикладывается её реакция  $S$ , обеспечивающая сохранение неизменным состояния равновесия системы.
2. Системе с удалённой связью, находящейся по-прежнему в равновесном деформированном состоянии при действующей нагрузке и реакции  $S$ , задаётся возможное (виртуальное) перемещение.
3. Определяются (с точностью до общего неопределённого множителя  $\delta_0$ ) перемещения  $\delta_F$  и  $\delta_S$  – соответственно по направлениям заданной нагрузки  $F$  и искомой реакции  $S$ .
4. Из уравнения возможных работ  $W_{ext} + W_{int} = 0$  определяется искомый силовой фактор  $S$  (реакция связи):

$$S = - \frac{F \cdot \delta_F + W_{int}}{\delta_S}$$

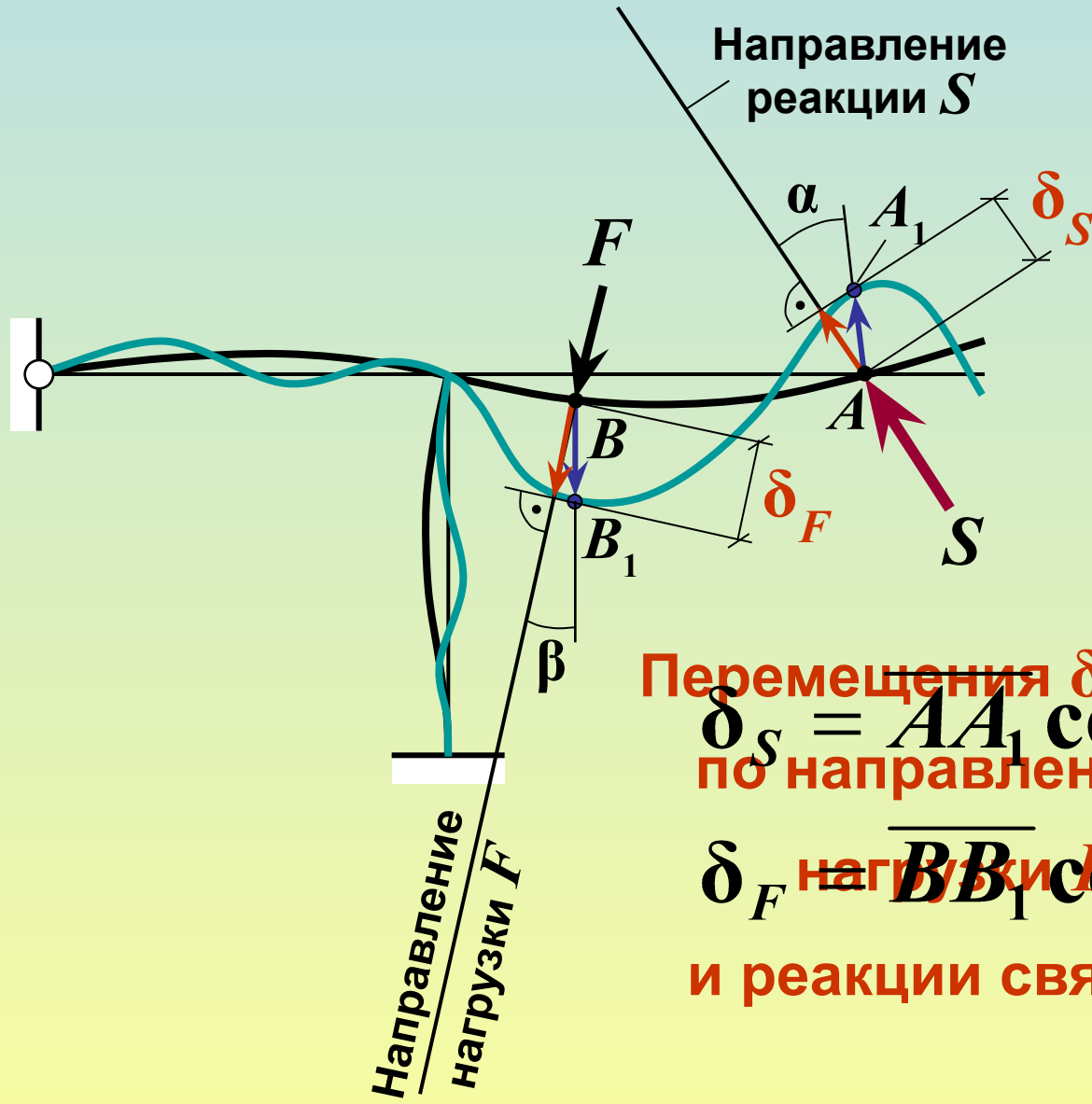


Требуется определить  
 реакцию связи  $R_A$   
 деформированное  
 состояние системы  
 (  $S \equiv R_A$  )

Примечание:  $F$  следует рассматривать как модель  
 обобщённой (произвольной) нагрузки



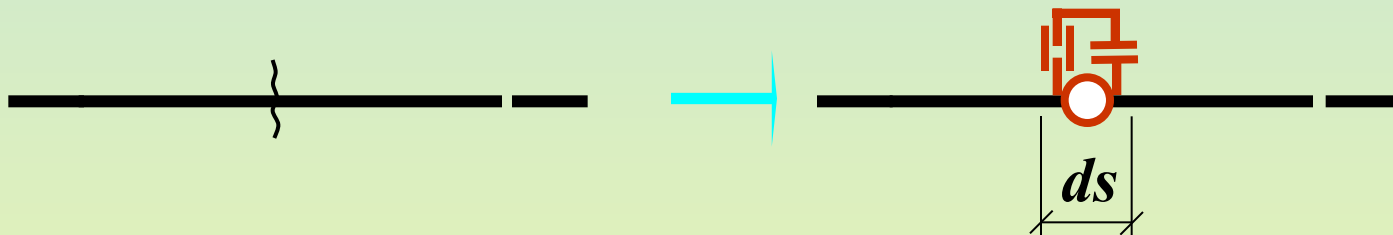
Возможные  
(виртуальные)  
перемещения



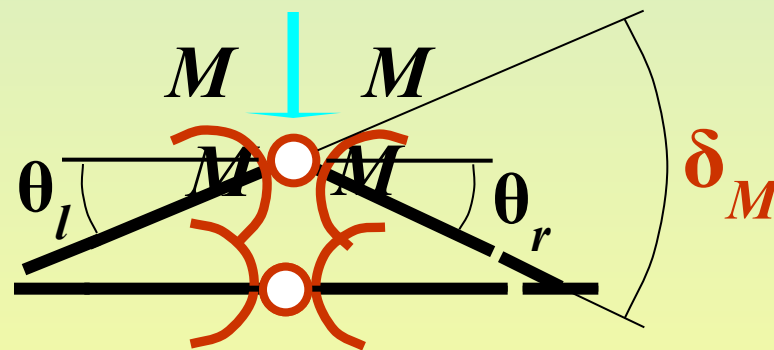
# Удаление внутренних связей.

## Смысл перемещения $\delta_S$

1. Удаление **внутренней угловой связи** для определения **изгибающего момента** в сечении ( $S \equiv M$ )



$\delta_S = \delta_M = \theta_l + \theta_r$  —  
 Возможная работа реакции  
 угла связи  $M$  относительно  
 (относительно виртуального)  
 поворота перемещение  
 бесконечно близко  
 слева и справа от  
 введённого шарнира



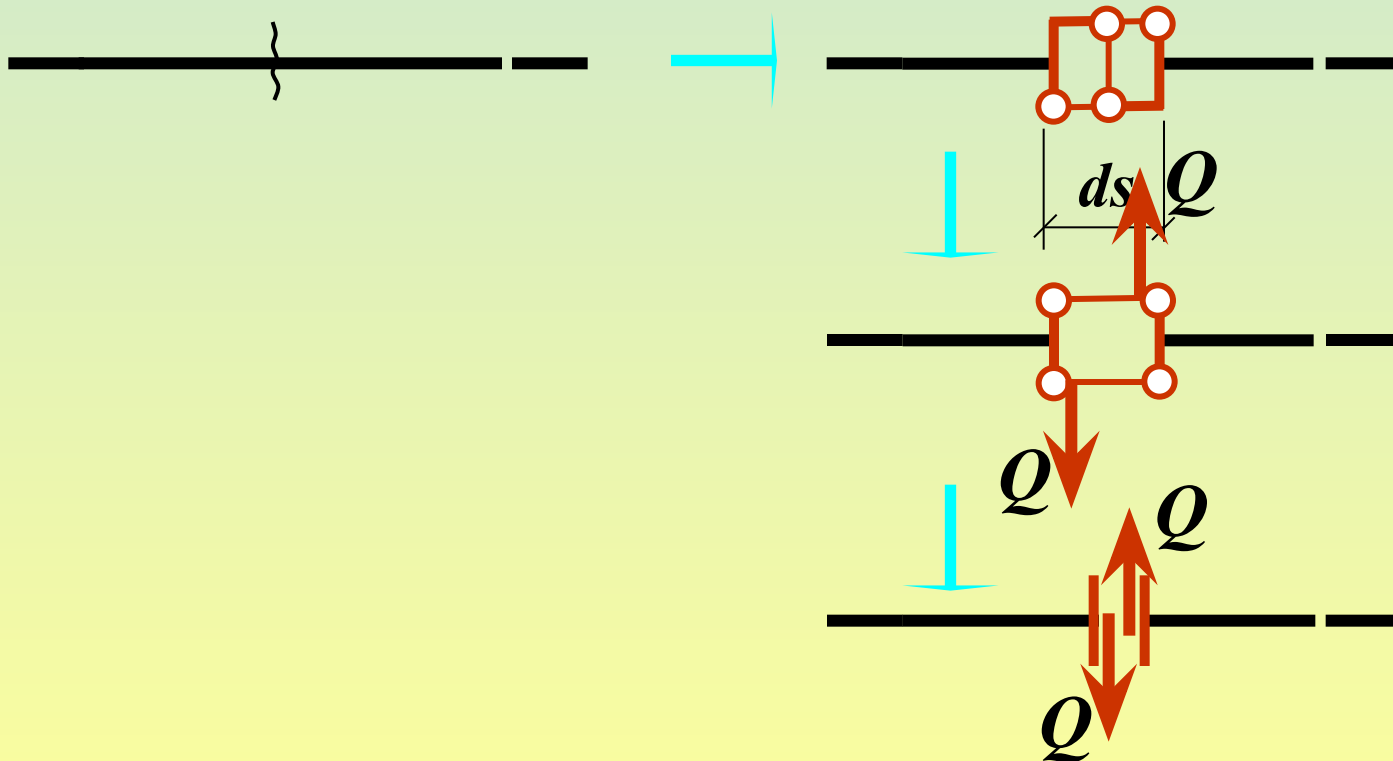
$$\theta_l > 0, \theta_r > 0 \rightarrow \delta_S > 0$$



# Удаление внутренних связей.

## Смысл перемещения $\delta_s$

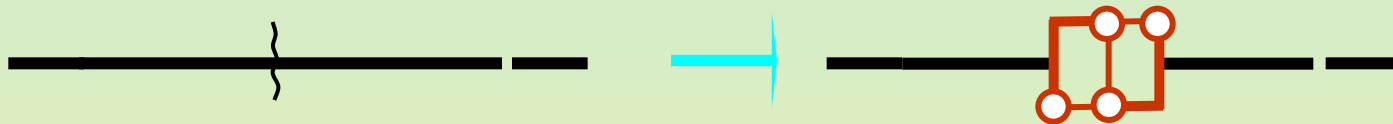
2. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **поперечной силы** в сечении ( $S \equiv Q$ )



# Удаление внутренних связей.

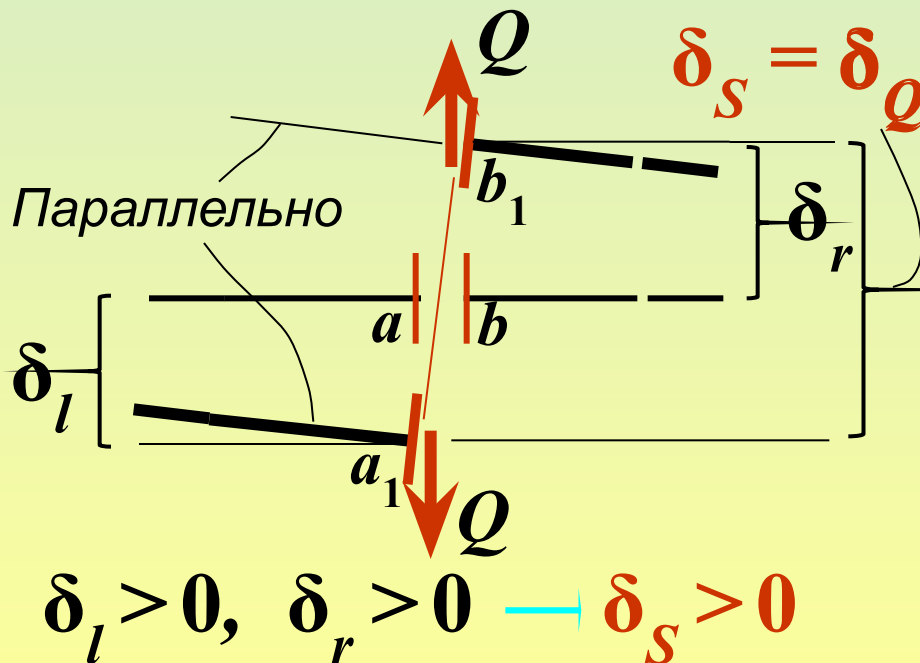
## Смысл перемещения $\delta_s$

### 2. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **поперечной силы** в сечении ( $S \equiv Q$ )



$\delta_s = \delta_Q = \delta_l + \delta_r$  —

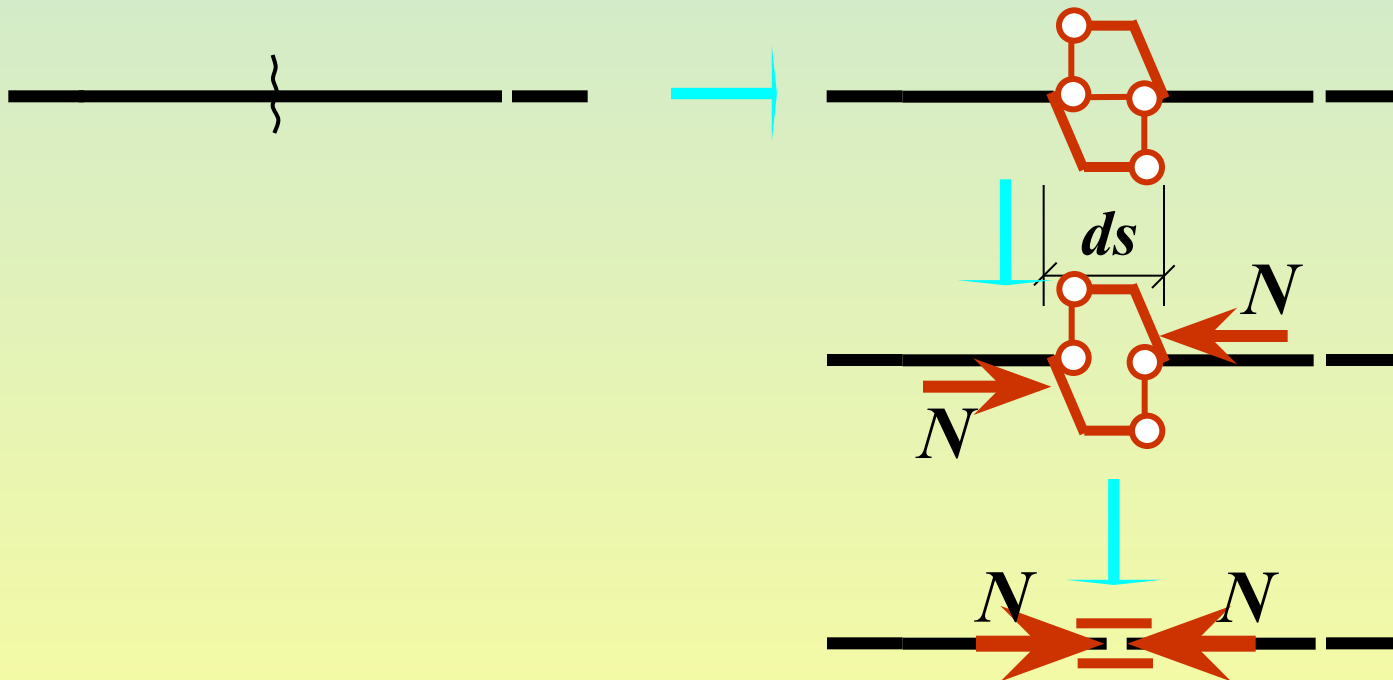
Возможная работа реакции удалённой связи: взаимное (относительное) нормальное смещение стержня (виртуальное) сечений  $Q$  (точек  $a$  и  $b$ ) перемещение бесконечно близко слева и справа от введённого поступательного шарнира



# Удаление внутренних связей.

## Смысл перемещения $\delta_s$

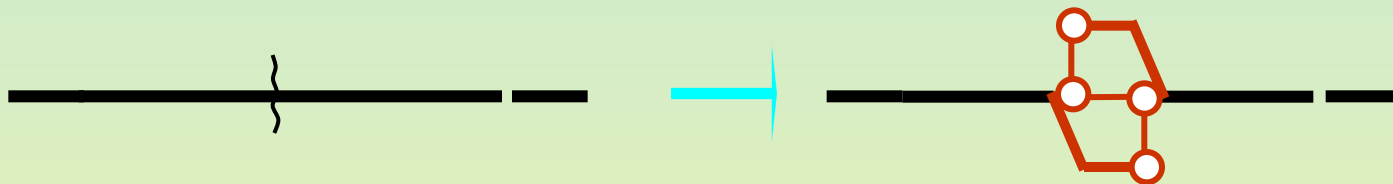
3. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **продольной силы** в сечении ( $S \equiv N$ )



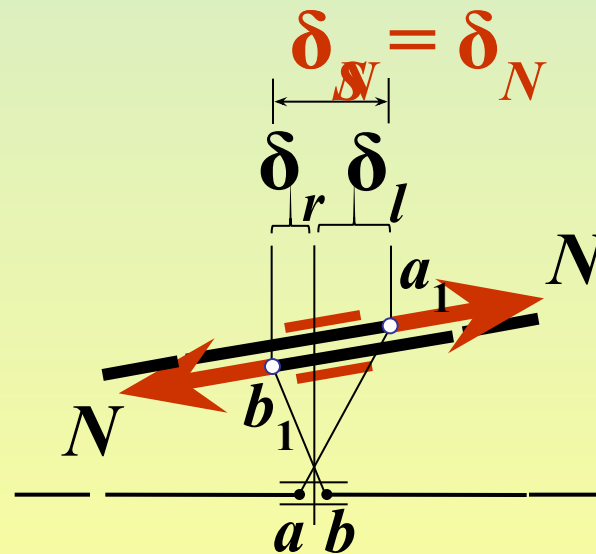
# Удаление внутренних связей.

## Смысл перемещения $\delta_S$

### 3. Удаление **внутренней линейной связи** для определения **продольной силы** в сечении ( $S \equiv N$ )



- $\delta_S = \delta_N = \delta_l + \delta_r$  — **Возможная работа реакции удалённой связи** по касательной к оси стержня линейное перемещение сечений (тогда  $\delta_S = N \cdot \delta$ ) бесконечно близко слева и справа от введённого поступательного шарнира



$$\delta_l > 0, \delta_r > 0 \rightarrow \delta_S > 0$$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ (СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ) ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Силовой фактор  $S$  в линейно деформируемой системе определяется как производная потенциальной энергии упругой деформации  $U$  (ПЭУД) по соответствующему перемещению  $\Delta_S$  по направлению  $S$   
(теорема Лагранжа):

$$S = \frac{dU}{d\Delta_S}$$

# Контрольные вопросы

*(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 22»)*

1. Какие силовые факторы определяются в расчётах сооружений и конструкций? ( 2 )
2. Перечислить основные методы определения силовых факторов. ( 2 )
3. В чём сущность статического метода определения реакций связей и внутренних усилий? ( 2 )
4. Какими уравнениями описывается равновесие
  - а) дифференциально-малого элемента ( 2 )
  - б) дискретной ( конечно-элементной ) линейно деформируемой системы? ( 2 )
5. Каково соотношение между числом уравнений равновесия и количеством искомым силовых факторов в случае статически определимой системы? ( 2 )
6. В чём суть универсальной процедуры формирования уравнений равновесия, реализующей концепцию конечных элементов? ( 5 )
7. Из каких групп состоит система уравнений равновесия, формируемых с помощью универсальной процедуры? ( 4 ) универсальной процедуры? ( 4 ) ( 6 )
8. Какие особенности имеет применение статического метода к статически неопределимым системам? ( 7 )
9. Каково необходимое и достаточное аналитическое ( статическое ) условие геометрической неизменяемости системы? ( 4 ) геометрической неизменяемости системы? ( 4 ) ( 7 )
10. На чём основан кинематический метод определения реакций связей ( силовых факторов )? Дать формулировку принципа Лагранжа. ( 8 )
11. Что такое возможные ( виртуальные ) перемещения? – три их свойства. ( 9 )
12. Какая обязательная процедура предшествует заданию виртуальных перемещений при реализации кинематического метода определения реакции некоторой связи? ( 10 )
13. Что такое обобщённая нагрузка и обобщённое перемещение? ( 10 )

---

\*) Только в режиме «Показ слайдов»

# Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках\*); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 23»)

14. Изложить алгоритм определения реакции связи кинематическим методом. (11)
15. Основная формула кинематического метода для определения силового фактора  $S$ . (11)
16. Что такое  $\delta_F$  и  $\delta_S$  в основной формуле кинематического метода? (10)
17. Каково правило знаков для перемещений  $\delta_F$  и  $\delta_S$ ? (10)
18. Какие связи должны удаляться при определении внутренних силовых факторов кинематическим методом? (самостоятельно)
19. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом изгибающего момента в определённом сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (16)
20. Какой смысл имеет величина  $\delta_S$  в случае определения изгибающего момента  $M$ ? (16)
21. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом поперечной силы в сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (17)
22. Какой смысл имеет величина  $\delta_S$  в случае определения поперечной силы  $Q$ ? (18)
23. Какая связь удаляется при определении кинематическим методом продольной силы в сечении стержневого элемента? Что появляется в сечении в результате удаления связи? (19)
24. Какой смысл имеет величина  $\delta_S$  в случае определения продольной силы  $N$ ? (20)
25. На чём основан энергетический метод определения силовых факторов в деформируемых системах? (21)
26. Аналитическая запись энергетической теоремы Лагранжа для определения силового фактора  $S$ . (21)

\*) Только в режиме «Показ слайдов»